

УДК 534.2.532

# СХОЖДЕНИЕ ТОНКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

*С. В. Хабиров, А. Р. Гарифуллин*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Рассмотрено точное решение уравнений движения идеальной жидкости, описывающее схождение к центру тонкой сферической оболочки. На начальном этапе получены простые асимптотические формулы, которые использованы для изучения устойчивости движения по отношению к потенциальным возмущениям.

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, радиальное движение оболочки, устойчивость

---

## 1 Введение

В работе [1] была рассмотрена модель развития отклонений от сферической формы при схлопывании полости в жидкости под действием внешнего перепада давления. Идеальная несжимаемая жидкость имеет большую протяженность по сравнению с радиусом полости. Давление в полости принимается равным нулю, либо однородным и подчиняющимся адиабатическому закону. Для получения приближенных аналитических решений рассматривается заключительная стадия схлопывания, когда имеют место наибольшие скорости и неограниченное развитие неустойчивости. Найдены простые приближенные формулы, описывающие отклонение от сферической формы.

В работе [2] рассматриваются задачи о движении под действием поверхностного натяжения идеальной несжимаемой жидкости в случае сферического слоя, сферической полости и кольца. Внешнее давление, действующее на жидкость, считается постоянным и одинаковым с обеих сторон. Получены формулы, выражающие время схлопывания через входные

данные. Вычислено время схлопывания полости, которое оказывается конечным.

В данной работе рассматривается задача об инерционном сжатии к центру тонкой сферической оболочки жидкости со следующими допущениями: движение радиальное, жидкость несжимаемая, не учитывается вязкость жидкости и поверхностное натяжение на границах оболочки. Считается, что движение происходит в невесомости, снаружи и изнутри оболочку окружает пустота, то есть давление на свободных границах равняется нулю, скорость поверхностей совпадает со скоростью частиц жидкости на них. В начальный момент времени движение определяется заданием скорости внутренней поверхности оболочки, при этом распределение давления и скорости внутри оболочки однозначно определяется из законов сохранения. Для получения приближенных уравнений данное движение было разбито на три этапа, каждый из которых характеризуется определенным диапазоном значений для отношения толщины оболочки к ее внутреннему радиусу. Приняли, что третий этап заканчивается в момент времени, когда толщина оболочки достигает значения, равного текущему внутреннему радиусу. Для первого этапа выведены приближенные формулы для эволюции внутреннего радиуса и толщины оболочки. Вывод приближенных формул более строгий, чем в работе [1]. Произведено численное сравнение приближений с точным численным решением. Подтверждены приближенные простые формулы, описывающие инерционное сжатие тонкой сферической оболочки.

Выведены линейные уравнения изменения потенциальных возмущений сферического движения в эйлеровых переменных. Разложенные по сферическим функциям, они определяют амплитуды возмущений. Для приближений первого этапа в случае линейного приближения по параметру  $\varepsilon$ , определяющему отношение толщины оболочки к ее внутреннему радиусу в начальный момент времени, получены уравнения, из которых можно определить нулевые приближения по  $\varepsilon$  амплитуд потенциал решения и амплитуд свободных поверхностей, первое приближение по  $\varepsilon$  для амплитуды внешней свободной поверхности. В случае одной гармонике данные амплитуды вычислены. Приведены графики для амплитуд свободных поверхностей, которые позволяют судить об устойчивости первого этапа сжатия.

## 2 Точная постановка задачи

Жидкий слой близкий к сферическому двигается за счет начального распределения скорости и давления.

Уравнения движения:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla P = 0,$$

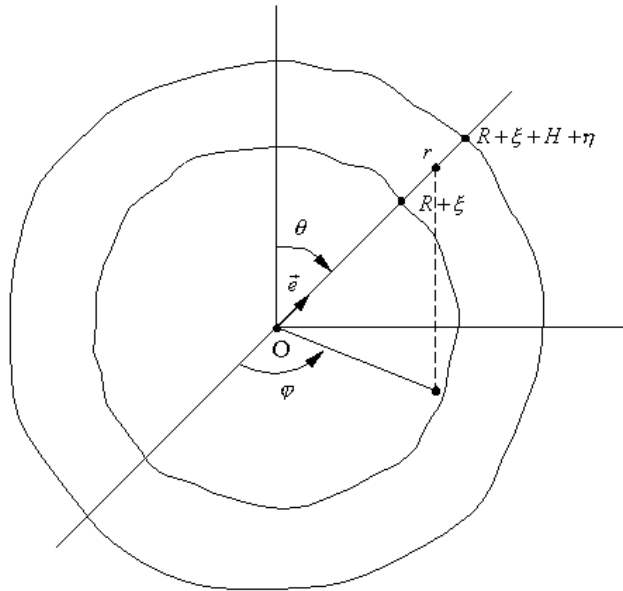


Рис. 1.

где  $P = p\rho^{-1}$ ,  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность, задано в области  $R(t) + \xi(t, \vec{e}) \leq r \leq R(t) + \xi(t, \vec{e}) + H(t) + \eta(t, \vec{e})$ ,  $|\vec{e}| = 1$  (см. Рис. 1).

Начальные условия:

$$\vec{u} = \vec{u}_0, \quad \text{div } \vec{u}_0 = 0, \quad p = p_0$$

в области  $R_0 + \xi_0 \leq r \leq R_0 + \xi_0 + H_0 + \eta_0$ ,  $\frac{H_0}{R_0} = \varepsilon$ ,  $\frac{|\xi_0|}{R_0}, \frac{|\eta_0|}{R_0} \leq \delta$ .

Условия на свободных границах (сферическая система координат):

$$f = -r + R + \xi = 0: \quad p = 0, \quad 0 = f_t + \vec{u} \cdot \nabla f \quad \Rightarrow$$

$$R' + \xi_t - U + \frac{W\xi_\varphi}{(R + \xi)\sin\theta} + \frac{V\xi_\theta}{R + \xi} = 0;$$

$$g = -r + R + \xi + H + \eta = 0: \quad p = 0, \quad 0 = g_t + \vec{u} \cdot \nabla g,$$

$$R' + H' + \xi_t + \eta_t - U + \frac{W(\xi_\varphi + \eta_\varphi)}{(R + H + \xi + \eta)\sin\theta} + \frac{V(\eta_\theta + \xi_\theta)}{R + H + \xi + \eta} = 0.$$

Уравнения движения в сферических координатах

$$\vec{u} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi, \quad \nabla = \vec{e}_r\partial_r + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\partial_\varphi + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\partial_\theta,$$

$$\text{div } \vec{u} = U_r + 2\frac{U}{r} + \frac{1}{r}V_\theta + \frac{V}{r}\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}W_\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned}
 U_t + UU_r + \frac{WU_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{V}{r}U_\theta + P_r &= \frac{1}{r}(W^2 + V^2), \\
 V_t + UV_r + \frac{WV_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{V}{r}V_\theta + \frac{1}{r}P_\theta &= \frac{1}{r}W^2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{r}VU, \\
 W_t + UW_r + \frac{WW_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{V}{r}W_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}P_\varphi &= -\frac{W}{r}(U + V \operatorname{ctg} \theta).
 \end{aligned}$$

### 3 Потенциальное движение

Пусть  $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ , то есть  $\vec{u} = \nabla \Phi$ . Тогда уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta \Phi &= 0, \quad P + \Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = D(t) \quad \Rightarrow \\
 \Phi_{rr} + 2\frac{1}{r}\Phi_r + \frac{\Phi_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta \cos \theta &= 0, \\
 P + \Phi_t + \frac{1}{2}\left(\Phi_r^2 + \frac{\Phi_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2\right) &= D(t), \\
 U = \Phi_r, \quad V = \frac{1}{r}\Phi_\theta, \quad W = \frac{1}{r \sin \theta}\Phi_\varphi.
 \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$\vec{u}_0 = \nabla \Phi_0, \quad \Delta \Phi_0 = 0, \quad \frac{p_0}{\rho} + \Phi_{0t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi_0)^2 = D_0.$$

Условия на свободных границах:

$$\begin{aligned}
 r = R + \xi: \quad p &= 0, \quad R' + \xi_t - \Phi_r + \frac{\Phi_\varphi \xi_\varphi}{(R + \xi)^2 \sin^2 \theta} + \frac{\Phi_\theta \xi_\theta}{(R + \xi)^2} = 0; \\
 r = R + H + \eta + \xi: \quad p &= 0, \\
 R' + H' + \eta_t + \xi_t - \Phi_r + \frac{\Phi_\varphi(\eta_\varphi + \xi_\varphi)}{(R + H + \eta + \xi)^2 \sin^2 \theta} + \frac{V(\eta_\theta + \xi_\theta)}{(R + H + \eta + \xi)^2} &= 0.
 \end{aligned}$$

### 4 Радиальное движение: $V = W = 0$

Из уравнения неразрывности получим, что потенциал скорости при сферически-симметричном движении обратно пропорционален расстоянию до центра симметрии:

$$\Phi = -\frac{C'(t)}{r},$$

скорость обратно пропорциональна квадрату расстояния:

$$U = \frac{C'(t)}{r^2}.$$

Из интеграла Бернулли находим давление

$$\frac{p}{\rho} = D(t) + \frac{C''(t)}{r} - \frac{C'^2(t)}{2r^4}.$$

Начальные условия:

$$U_0 = \frac{C_1}{r^2}, \quad P_0 = \frac{p_0(r)}{\rho} = D_0 + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1^2}{2r^4},$$

где

$$C(0) = 0, \quad C'(0) = C_1 < 0, \quad C''(0) = C_2.$$

Условия на свободных поверхностях:

$$r = R(t) : \quad 3C(t) = R^3 - R_0^3, \quad D(t) = \frac{(R^2 R')^2}{2R^4} - \frac{(R^2 R)'}{R};$$

$$r = R(t) + H(t) : \quad 3C(t) = (R + H)^3 - (R_0 + H_0)^3,$$

$$D(t) = \frac{(R^2 R')^2}{2(R + H)^4} - \frac{(R^2 R)'}{R + H}.$$

Отсюда следуют уравнения для  $R(t)$  и  $H(t)$ :

$$(H + R)^3 = R^3 + (R_0 + H_0)^3 - R_0^3$$

или

$$3R^2 H + 3RH^2 + H^3 = 3R_0 H_0 (R_0 + H_0) + H_0^3,$$

$$RR'' = \frac{1}{2}R'^2 \left( \left( \frac{R}{R + H} \right)^3 + \left( \frac{R}{R + H} \right)^2 + \frac{R}{R + H} - 3 \right),$$

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = C_1 R_0^{-2}.$$

Введем безразмерные переменные:  $x, y, \varepsilon$

$$R = R_0 y, \quad H = R_0 x, \quad H_0 = \varepsilon R_0, \quad \tau = \frac{|C_1|}{R_0^3} t.$$

Тогда получим задачу с одним параметром  $\varepsilon$ . Уравнение движения:

$$yy_{\tau\tau} = \frac{1}{2}y_{\tau}^2 \left( \left( \frac{y}{y + x} \right)^3 + \left( \frac{y}{y + x} \right)^2 + \frac{y}{y + x} - 3 \right),$$

$$y(0) = 1, \quad y_{\tau}(0) = -1;$$

уравнение сохранения массы:

$$xy(x + y) + \frac{1}{3}x^3 = \varepsilon(1 + \varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^3.$$

Сделаем замену  $y_\tau = z$ , тогда систему дифференциальных уравнений можно представить в интегральном виде:

$$\tau(\varepsilon) = \int_1^y \frac{dy}{z(y)}, \quad 2 \ln |z| = \int_1^y \left[ \frac{y^3}{\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + y^3} + \frac{y^2}{(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + y^3)^{2/3}} + \frac{y}{(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + y^3)^{1/3}} - 3 \right] \frac{dy}{y}.$$

Для определения времени схлопывания  $\tau_k$  и  $x_k$  пользуемся формулами

$$\tau_k(\varepsilon) = \int_1^0 \frac{dy}{z(y)}, \quad x_k^3 = 3\varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon^3.$$

Вычисления приведены в Табл. 1 для  $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ . Значения интегралов для  $\tau_k$  и  $\tau_*$  вычислены с помощью метода Симпсона.

Таблица 1

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001
$\tau_k$	0.6089	0.7881	0.8974
$x_k$	0.6917	0.3118	0.1443
$\tau_*$	0.5260	0.7539	0.8817
$x_*$	0.3616	0.1630	0.0754
$z_*$	-1.961	-2.1385	-2.1587

Время  $\tau_*$  определяется из условия равенства внутреннего радиуса и толщины  $x_* = x = y$  и вычисляется по формуле

$$\tau_* = \int_1^{x_*} \frac{dy}{z(y)}, \quad 7x_*^3 = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon.$$

## 5 Начальное распределение радиального движения

Распределение функций внутри радиального слоя таково:

$$U = \frac{R^2 R'}{r^2}, \quad \Phi = -\frac{R^2 R'}{r},$$

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} R'^2 \frac{R}{R+H} \left( \left( \frac{R}{R+H} \right)^2 + \frac{R}{R+H} + 1 \right) +$$

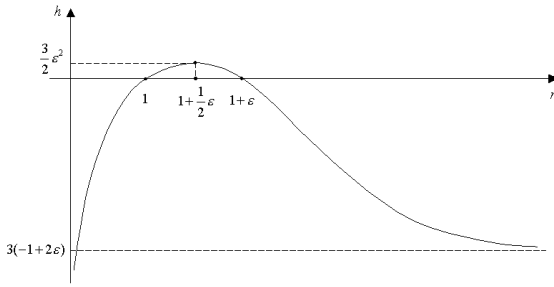


Рис. 2.

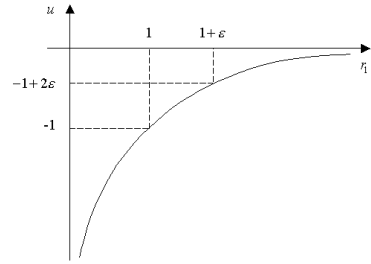


Рис. 3.

$$+\frac{1}{2r}RR^2 \left( \left( \frac{R}{R+H} \right)^3 + \left( \frac{R}{R+H} \right)^2 + \frac{R}{R+H} + 1 \right) - \frac{R^4 R'^2}{2r^4}.$$

При  $t = 0$  получим начальное распределение  $\frac{r}{R_0} = r_1$ ,

$$\frac{R_0^2 U(0)}{|C_1|} = -\frac{1}{r_1^2} = u(r_1);$$

$$2\frac{R_0^4 P(0)}{C_1^2} = -\frac{3+3\epsilon+\epsilon^2}{(1+\epsilon)^3} + \frac{1}{r_1} \frac{4+6\epsilon+4\epsilon^2+\epsilon^3}{(1+\epsilon)^3\epsilon} - \frac{1}{r_1^4} = h(r_1),$$

$$h(r_1) = \frac{1-(1+\epsilon)^3}{\epsilon(1+\epsilon)^3} + \frac{1}{r_1} \frac{(1+\epsilon)^4-1}{\epsilon(1+\epsilon)^3} - \frac{1}{r_1^4}.$$

Функция  $h(r_1)$  имеет корни 1 и  $1+\epsilon$ , максимум:

$$h_m = \frac{3}{4} r_m^{-1} \frac{(1+\epsilon)^4-1}{\epsilon(1+\epsilon)^3} + \frac{1-(1+\epsilon)^3}{\epsilon(1+\epsilon)^3} \sim \frac{3}{2} \epsilon^2,$$

$$r_m^3 = \frac{4\epsilon(1+\epsilon)^3}{(1+\epsilon)^4-1} \sim 1 + \frac{3}{2}\epsilon - \frac{1}{4}\epsilon^2,$$

$$r_m \sim 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{3}\epsilon^2.$$

Зависимости  $h(r_1)$  и  $u(r_1)$  приведены соответственно на Рис. 2 и 3.

## 6 Квадратура радиального движения

Уравнения радиального движения сводятся к системе из двух уравнений первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y_\tau = z(y), \quad yz_y = \frac{1}{2}z \left( \left( \frac{y}{y+x} \right)^3 + \left( \frac{y}{y+x} \right)^2 + \frac{y}{y+x} - 3 \right),$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, & z(1) &= -1, \\ x &= -y + (\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon + y^3)^{1/3} \end{aligned} \quad (*)$$

или

$$xy(x+y) + \frac{1}{3}x^3 = \varepsilon(1+\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^3.$$

Уравнение для  $z$  имеет интеграл скорости

$$z = C(y^3 + m)^{1/6}y^{-3/2} \left( (y^3 + m)^{1/3} - y \right)^{-1/2}, \quad m = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon.$$

Для скорости изменения толщины имеем уравнения

$$x_\tau = -2Cx^{3/2} \left( \frac{m}{3} - \frac{x^3}{12} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{3} - \frac{x^3}{3} \right)^{-3/2}, \quad y = -\frac{x}{2} + \left( \frac{m}{3x} - \frac{x^2}{12} \right)^{1/2}.$$

Подставляя начальные данные, получим  $C = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}}$ .

Здесь есть только один малый параметр  $\varepsilon$ . Растяжением  $y = ly_j$ ,  $x = kx_j$  введем в задачу два новых параметра  $l$  и  $k$ , которые связаны с параметром  $\varepsilon$  так, чтобы на рассматриваемом этапе движения величины  $x_j$ ,  $y_j$  были конечными. Начальный этап  $j = 1$  определяется соотношениями  $l = 1$ ,  $k = \varepsilon$ . Тогда из (\*)  $x_1y^2 \sim \varepsilon + \varepsilon^2(1 - y^{-3})$ . Конечный этап  $j = 3$  определяется соотношением  $l = k = \delta$ , где  $\delta$  — малая величина, порядок которой по  $\varepsilon$  определяется из (\*):  $\delta = \varepsilon^{1/3}$ ,  $x_3y_3(x_3+y_3) + \frac{1}{3}x_3^3 = 1 + \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2$ . Средний этап  $j = 2$  определяется соотношениями  $l = \delta$ ,  $k = \delta^2$ , где порядок величины  $\delta$  по  $\varepsilon$  определяется из (\*):  $\delta = \varepsilon^{1/4}$ ,  $x_2y_2(y_2 + \varepsilon^{1/4}x_2) + \frac{1}{3}\varepsilon^{1/2}x_2^3 = 1 + \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^2$ .

Интегрирование уравнений сводится к квадратурам времени

$$\tau - \tau_0 = \int_{y_0}^{y_j} \frac{dy_j}{z_j(y_j)}, \quad lz_j = z_ly_j \quad \Rightarrow \quad z_j(y_j, l) = l^{-1}z_ly_j$$

и скорости

$$2 \ln \frac{z_j}{z_{j0}} = \int_{y_{j0}}^{y_j} \left[ \left( 1 + \frac{kx_j}{ly_j} \right)^{-3} + \left( 1 + \frac{kx_j}{ly_j} \right)^{-2} + \left( 1 + \frac{kx_j}{ly_j} \right)^{-1} - 3 \right] \frac{dy_j}{y_j},$$

$$z_ly_0 = z_{j0},$$

где  $x_j$  находится из уравнения

$$klx_jy_j(kx_j + ly_j) + \frac{1}{3}(kx_j)^3 = \varepsilon(1+\varepsilon) + \frac{1}{3}\varepsilon^3,$$

значения  $z_{j0}$ ,  $y_{j0}$  выбираются из предыдущего этапа.



## 7 Начальный этап

Переменные  $y$ ,  $x_1 = x\varepsilon^{-1}$  принимают конечные значения.

Необходимо вычислить асимптотику интеграла

$$I = \int_1^y \left[ \left(1 + \varepsilon \frac{x_1}{y}\right)^{-3} + \left(1 + \varepsilon \frac{x_1}{y}\right)^{-2} + \left(1 + \varepsilon \frac{x_1}{y}\right)^{-1} - 3 \right] \frac{dy}{y},$$

где функция  $x_1(y, \varepsilon)$  определяется равенством  $x_1 y (\varepsilon x_1 + y) + \frac{1}{3} \varepsilon^2 x_1^3 = 1 + \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^2$ .

Функцию  $x_1(y, \varepsilon)$  разыскиваем в виде ряда  $x_1 = \sum_{j \geq 0} \xi_j(y) \varepsilon^j$ :

$$y(\xi_0 + \xi_1 \varepsilon + \xi_2 \varepsilon^2 + \dots)(y + \varepsilon \xi_0 + \varepsilon^2 \xi_1 + \dots) + \frac{1}{3} \varepsilon^2 (\xi_0 + \dots)^3 = 1 + \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^2.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\xi_0 y^2 = 1, \quad y \xi_0^2 + y^2 \xi_1 = 1, \quad y^2 \xi_2 + 2y \xi_1 \xi_0 + \frac{1}{3} \xi_0^3 = \frac{1}{3}, \dots \Rightarrow$$

$$\xi_0 = y^{-2}, \quad \xi_1 = y^{-2} - y^{-5}, \quad \xi_2 = \frac{1}{3} y^{-2} - 2y^{-5} + \frac{5}{3} y^{-8}, \dots$$

Итак, величина  $x_1$  с точностью до  $\varepsilon^2$  дается формулой

$$x_1 \sim y^{-2} + \varepsilon (y^{-2} - y^{-5}) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} y^{-2} - 2y^{-5} + \frac{5}{3} y^{-8} \right).$$

Интеграл  $I$  с точностью до  $\varepsilon^2$  равен

$$2 \ln |z| = I \sim 2\varepsilon (y^{-3} - 1) + \varepsilon^2 \left( 2y^{-3} - \frac{8}{3} y^{-6} + \frac{2}{3} \right).$$

Отсюда получим выражение

$$z \sim -1 + \varepsilon (1 - y^{-3}) - \frac{5}{6} \varepsilon^2 (1 - y^{-6}).$$

То же самое выражение получается из интеграла скорости.

Для приведенного времени имеем

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_1^y \left( 1 - \varepsilon (1 - y^{-3}) + \frac{5}{6} \varepsilon^2 (1 - y^{-6}) \right)^{-1} dy \sim \\ &\sim 1 - y + \varepsilon \left( \frac{3}{2} - y - \frac{1}{2} y^{-2} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{6} y - y^{-2} + \frac{11}{30} y^{-5} \right). \end{aligned}$$

Обратную функцию разыскиваем в виде  $y = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots$ .  
Из тождества

$$\tau \sim 1 - y_0 - \varepsilon y_1 - \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon \left( \frac{3}{2} - y_0 - \varepsilon y_1 - \frac{1}{2} y_0^{-2} (1 - 2\varepsilon y_1 y_0^{-1}) \right) + \\ + \varepsilon^2 \left( \frac{4}{5} - \frac{1}{6} y_0 - y_0^{-2} + \frac{11}{30} y_0^{-5} \right),$$

приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\tau = 1 - y_0, \quad y_1 = \frac{3}{2} - y_0 - \frac{1}{2} y_0^{-2}, \quad y_2 = -y_1 + y_0^{-3} y_1 + \frac{4}{5} - \frac{1}{6} y_0 - y_0^{-2} + \frac{11}{30} y_0^{-5}.$$

Отсюда находим функции  $y(\tau)$  и  $x = \varepsilon x_1$ :

$$y \sim 1 - \tau + \varepsilon \left( \frac{1}{2} + \tau - \frac{1}{2} (1 - \tau)^{-2} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left( \frac{2}{15} - \frac{5}{6} \tau - \frac{3}{2} (1 - \tau)^{-2} + \frac{3}{2} (1 - \tau)^{-3} - \frac{2}{15} (1 - \tau)^{-5} \right).$$

Также получится, если в уравнение  $y_\tau = z(y)$  подставить приближение

$$x \sim \varepsilon (1 - \tau)^{-2} - 3\varepsilon^2 \tau (1 - \tau)^{-3}.$$

На Рис. 4, 5 приведены зависимости  $y(\tau)$ ,  $x(\tau)$  приближенных решений на интервале вплоть до  $x = y = x_{1*}$  ( $\tau \in [0, \tau_{1*}]$ ) в сравнении с численным решением в точной постановке (численным решением уравнений движения при использовании уравнений сохранения массы методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности) для  $\varepsilon = 0.1, 0.01$ . Сплошной линией обозначено точное решение, штрихпунктирной линией — приближенное решение.

Для сравнения на Рис. 6, 7 приведены аналогичные графики с точностью до  $\varepsilon$ , которые вычисляются по тем же формулам без слагаемых, содержащих  $\varepsilon^2$ .

Ниже в Табл. 2 приведено сравнение значений  $\tau_*$ ,  $x_*$  численного решения в точной постановке из Табл. 1 § 4 со значениями  $\tau_{1*} + o(\varepsilon^2)$ ,  $x_{1*} + o(\varepsilon^2)$ ,  $\tau_{1*} + o(\varepsilon)$ ,  $x_{1*} + o(\varepsilon)$ .

Таблица 2

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001
$\tau_* - \tau_{1*} - o(\varepsilon^2)$	-0.0278	-0.0061	-0.003
$\tau_* - \tau_{1*} - o(\varepsilon)$	0.006	-0.0036	-0.0043
$x_* - x_{1*} - o(\varepsilon^2)$	0.0464	0.0059	0.002
$x_* - x_{1*} - o(\varepsilon)$	-0.2356	-0.007	-0.0015

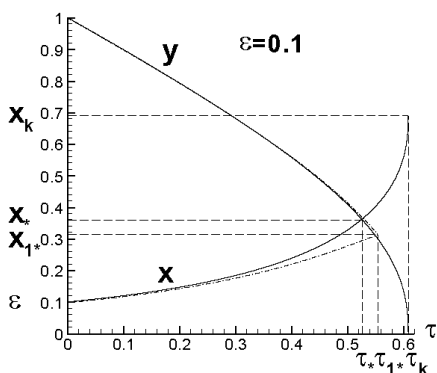


Рис. 4.

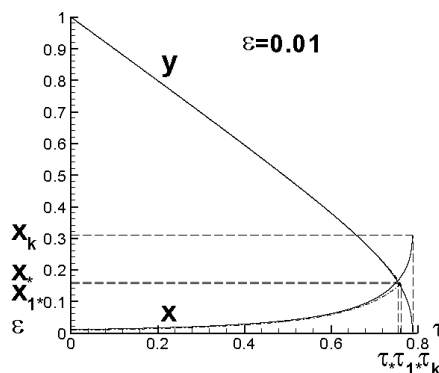


Рис. 5.

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001
$\tau_{1*} + o(\varepsilon^2)$	0.5538	0.7600	0.8847
$x_{1*} + o(\varepsilon^2)$	0.3152	0.1571	0.0734

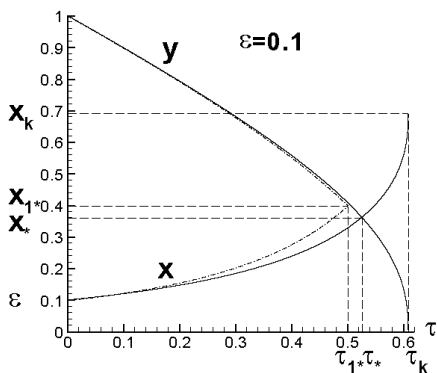


Рис. 6.

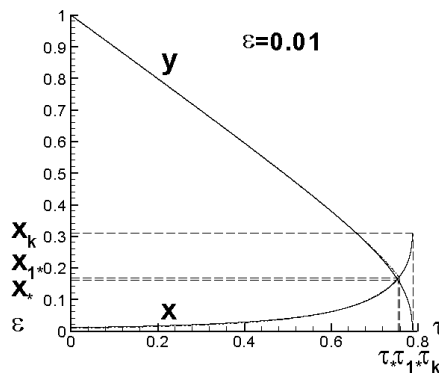


Рис. 7.

$\varepsilon$	0.1	0.01	0.001
$\tau_{1*} + o(\varepsilon)$	0.5000	0.7575	0.8860
$x_{1*} + o(\varepsilon)$	0.4000	0.1700	0.0769

Видно, что при  $\varepsilon = 0.1, 0.01$   $x_{1*}$  точнее при использовании приближенных формул для  $y, x$  с учетом слагаемых при  $\varepsilon^2$ , чем без их учета, а при  $\varepsilon = 0.001$  наоборот. При этом время  $\tau_{1*}$  при  $\varepsilon = 0.1, 0.01$  точнее, когда используются формулы без учета квадратичных слагаемых по  $\varepsilon$ , а при  $\varepsilon = 0.001$  точнее, когда используются формулы с учетом квадратичных слагаемых по  $\varepsilon$ .

## 8 Потенциальные возмущения радиального движения

Рассмотрим потенциальное движение близкое к радиальному движению

$$\Phi = -\frac{R^2 R'}{r} + \delta\psi, \quad \psi = 0; \quad P = \frac{(R^2 R')^2}{2R^4} - \frac{(R^2 R)'}{R} + \frac{(R^2 R)'}{r} - \frac{(R^2 R')^2}{2r^4} - \delta \left( \psi_t + \frac{R^2 R'}{r^2} \psi_r \right) - \frac{1}{2} \delta^2 \left( \psi_r^2 + \frac{\psi_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\psi_\theta^2}{r^2} \right).$$

Начальное распределение таково:

$$\Phi_0 = -\frac{C_1}{r} + \delta\psi_0, \quad \Delta\psi_0 = 0, \quad P_0 = \frac{C_1^2}{2R_0^4} - \frac{C_2}{R_0} + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1^2}{2r^4} - \delta \left( \psi_{0t} + \frac{C_1}{r^2} \psi_{0r} \right) - \frac{1}{2} \delta^2 \left( \psi_{0r}^2 + \frac{\psi_{0\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\psi_{0\theta}^2}{r^2} \right).$$

Гармоническую функцию можно представить в виде ряда по сферическим функциям целых степеней  $S_n(\varphi, \theta)$  ( $n$  — порядок) [3, §81–89]

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t)r^n + b_n(t)r^{-n-1}) S_n(\varphi, \theta).$$

Для инерционного движения оболочки близкой к сферической определим начальные данные, пренебрегая членами с  $\delta^2$ ,

$$\Phi_0 = -\frac{C_1}{r} + \delta \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n0}r^n + b_{n0}r^{-n-1}) S_n(\varphi, \theta), \quad P_0 \sim \frac{C_1^2}{2R_0^4} - \frac{C_2}{R_0} + \frac{C_2}{r} - \frac{C_1^2}{2r^4} - \delta \sum_{n=1}^{\infty} S_n (a'_{n0}r^n + b'_{n0}r^{-n-1} + nC_1 a_{n0}r^{n-3} - (n+1)C_1 b_{n0}r^{-n-4}).$$

Решение задается равенствами

$$\Phi = -\frac{R^2 R'}{r} + \delta \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t)r^n + b_n(t)r^{-n-1}) S_n(\varphi, \theta), \quad P \sim \frac{(R^2 R')^2}{2R^4} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(R^2 R')'}{R} + \frac{(R^2 R')'}{r} - \frac{(R^2 R')^2}{2r^4} - \delta \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(t)r^{n-1} + b'_n(t)r^{-n-1} - \\
 & - R^2 R' n C_1 a_n(t)r^{n-3} + R^2 R'(n+1)b_n(t)r^{-n-4}) S_n - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r^2} \left( \left( \sum_{n=1}^{\infty} (na_n r^n - (n+1)b_n r^{-n-1}) S_n \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \sin^{-2} \theta \left( \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) S_{n\varphi} \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) S_{n\theta} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Условия на свободной поверхности  $r = R + \delta \sum_{n=1}^{\infty} S_n \xi_n(t)$  с точностью до  $\delta^2$  дают:

$$\begin{aligned}
 P = 0 \quad \Rightarrow \quad & \left( -\frac{(R^2 R')'}{R^2} + 2\frac{R'^2}{R} \right) \xi_n = \\
 & = a'_n R^n + b'_n R^{-n-1} - R^{n-1} R' n a_n + R^{-n-2} R'(n+1)b_n, \\
 R' + \delta \xi'_t \approx \Phi_r \quad \Rightarrow \quad & \xi'_n + 2\frac{R'}{R} \xi_n = n a_n R^{n-1} - b_n (n+1) R^{-n-2}.
 \end{aligned}$$

Условия на свободной поверхности  $r = R + H + \delta \sum_{n \geq 1} S_n (\xi_n + \eta_n(t))$  с точностью до  $\delta^2$  дают

$$\begin{aligned}
 P = 0 \quad \Rightarrow \quad & \left( -\frac{(R^2 R')'}{(R+H)^2} + 2\frac{(R^2 R')^2}{(R+H)^5} \right) (\eta_n + \xi_n) = \\
 & = a'_n (R+H)^n + b'_n (R+H)^{-n-1} - R^2 (R+H)^{n-3} R' n a_n + R^2 (R+H)^{-n-4} R'(n+1)b_n, \\
 R' + H' + \eta'_t + \xi'_t \approx \Phi_r \quad \Rightarrow \quad & \xi'_n + \eta'_n + 2\frac{H' + R'}{H + R} (\xi_n + \eta_n) = \\
 & = a_n n (R+H)^{n-1} - b_n (n+1) (R+H)^{-n-2}.
 \end{aligned}$$

Получили 4 линейных уравнения для амплитуд потенциала решения  $a_n, b_n$  и для амплитуд свободных поверхностей  $\xi_n, \eta_n$ . Эти уравнения служат для определения области по  $t$ , в которой амплитуды мало растут (область относительной устойчивости).

## 9 Уравнения для изучения устойчивости в безразмерном виде

Определим безразмерные переменные  $R = R_0 y$ ,  $H = R_0 x$ ,  $H_0 = \varepsilon R_0$ ,  $\tau = \frac{|C_1|}{R_0^3} t$ ;  $\frac{a_n R_0^{n+1}}{|C_1|} = \alpha_n$ ,  $\frac{b_n}{R_0^n |C_1|} = \beta_n$ ,  $\frac{\xi_n}{R_0} = \sigma_n$ ,  $\frac{\eta_n}{R_0} = \omega_n$ , тогда 4 линейных уравнения для амплитуд возмущений из § 8 примут вид:

$$\begin{aligned} -y''\sigma_n &= \alpha'_n y^n + y^{-n-1}\beta'_n - ny^{n-1}y'\alpha_n + (n+1)y^{-n-2}y'\beta_n, \\ (y^2\sigma_n)' &= y^2\sigma'_n + 2yy'\sigma_n = n\alpha_n y^{n+1} - (n+1)\beta_n y^{-n}, \\ -(x+y)''(\omega_n + \sigma_n) &= \alpha'_n(x+y)^n + \beta'_n(x+y)^{-n-1} - \\ &\quad - ((x+y)^n)' \alpha_n - ((x+y)^{-n-1})' \beta_n, \\ ((x+y)^2(\sigma_n + \omega_n))' &= n\alpha_n(x+y)^{n+1} - (n+1)\beta_n(x+y)^{-n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $(x+y)^3 = y^3 + (1+\varepsilon)^3 - 1$ .

## 10 Линейное приближение уравнений устойчивости

При линейном приближении по  $\varepsilon$  для первого этапа в § 7 были получены формулы

$$y = y_0 + \varepsilon y_1, \quad x = \varepsilon x_1, \quad (2)$$

где  $y_0 = 1 - \tau$ ,  $y_1 = \frac{3}{2} - y_0 - \frac{1}{2}y_0^{-2}$ ,  $x_1 = y_0^{-2}$ .

В случае линейного приближения по  $\varepsilon$  из (2) следуют выражения

$$y^n = y_0^n + \varepsilon n y_0^{n-1} y_1, \quad (x+y)^n = y_0^n + \varepsilon n y_0^{n-1} (y_1 + x_1), \quad (3)$$

а функции  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\omega_n$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_{0n}(\tau) + \varepsilon \alpha_{1n}(\tau), & \beta_n &= \beta_{0n}(\tau) + \varepsilon \beta_{1n}(\tau), \\ \sigma_n &= \sigma_{0n}(\tau) + \varepsilon \sigma_{1n}(\tau), & \omega_n &= \omega_{0n}(\tau) + \varepsilon \omega_{1n}(\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

При подстановке (2)–(4) в уравнения (1), и приравновании нулю слагаемых при  $\varepsilon$  и не содержащих  $\varepsilon$ , получается 7 равенств (два уравнения совпали).

$$y_0^{2n+1} (y_0 \alpha'_{0n} + n \alpha_{0n}) + y_0 \beta'_{0n} - (n+1) \beta_{0n} = 0, \quad (5)$$

$$y_0^{n+1} (y_0 \sigma'_{0n} - 2 \sigma_{0n}) = n y_0^{2n+1} \alpha_{0n} - (n+1) \beta_{0n}, \quad (6)$$

$$y_0 \omega'_{0n} - 2 \omega_{0n} = 0, \quad (7)$$

$$3y_0^{n-1}\sigma_{0n} = y_0^{2n+2}(y_0\alpha'_{1n} + n\alpha_{1n}) + y_0(y_0\beta'_{1n} - (n+1)\beta_{1n}) + y_0^{2n+1} \times \\ \times ((2n+1)y_0y_1\alpha'_{0n} + n(2ny_1 - y_0y'_1)\alpha_{0n}) + (n+1)(y_0y'_1 + y_1)\beta_{0n}, \quad (8)$$

$$y_0^{n+2}(y_0\sigma'_{1n} - 2\sigma_{1n}) + 2y_0^{n+1}(y_0y'_1 + y_1)\sigma_{0n} = \\ = ny_0^{2n+1}(y_0\alpha_{1n} + (n-1)y_1\alpha_{0n}) - (n+1)(y_0\beta_{1n} - (n+2)y_1\beta_{0n}), \quad (9)$$

$$-3y_0^{n-1}(\omega_{0n} + \sigma_{0n}) = y_0^{2n+2}(y_0\alpha'_{1n} + n\alpha_{1n}) + y_0(y_0\beta'_{1n} - \\ - (n+1)\beta_{1n}) + y_0^{2n+1}((2n+1)y_0(y_1 + x_1)\alpha'_{0n} + n(2n(y_1 + x_1) - \\ - y_0(y_1 + x_1)')\alpha_{0n} + (n+1)(y_0(y_1 + x_1)' + y_1 + x_1)\beta_{0n}), \quad (10)$$

$$y_0^{n+2}(y_0(\sigma_{1n} + \omega_{1n})' - 2(\sigma_{1n} + \omega_{1n})) + 2y_0^{n+1}(y_0(y_1 + x_1)' + \\ + y_1 + x_1)(\sigma_{0n} + \omega_{0n}) = ny_0^{2n+1}(y_0\alpha_{1n} + (n-1)(y_1 + x_1)\alpha_{0n}) + \\ + (n+1)(-y_0\beta_{1n} + (n+2)(y_1 + x_1)\beta_{0n}). \quad (11)$$

Интегрирование (7) дает

$$\omega_{0n} = \frac{C_{0n}}{|1 - \tau|^2}. \quad (12)$$

где  $C_{0n}$  — постоянные.

Из (8), (10) следует

$$\sigma_{0n} = -\frac{1}{6}((2n+1)y_0^{n+1}x_1\alpha'_{0n} + 2n(n-1)y_0^n\alpha_{0n} + \\ + 3(n+1)y_0^{-n-1}\beta_{0n}) - \frac{1}{2}\omega_{0n}. \quad (13)$$

При подстановке (13) в (6) с учетом (5) следует равенство

$$6(n-1)(n+1)\beta_{0n} = \\ = -(2n+1)y_0^{2n+3}\alpha''_{0n} + 6(2n+1)y_0^{2n+2}\alpha'_{0n} + n(2n^2 + 5n - 7)y_0^{2n+1}\alpha_{0n}.$$

Из этого равенства при  $n = 1$  следует уравнение для определения функции  $\alpha_{01}$

$$-y_0\alpha''_{01} + 6\alpha'_{01} = 0, \quad (14)$$

а при  $n \geq 2$  получим формулу для определения  $\beta_{0n}$

$$\beta_{0n} = \frac{1}{6(n-1)(n+1)} (-2(n+1)y_0^{2n+3}\alpha''_{0n} + \\ + 6(2n+1)y_0^{2n+2}\alpha'_{0n} + n(2n^2 + 5n - 7)y_0^{2n+1}\alpha_{0n}). \quad (15)$$

При подстановке (15) в (5) получим уравнение для  $\alpha_{0n}$  при  $n \geq 2$

$$y_0^3\alpha'''_{0n} - (3n+10)y_0^2\alpha''_{0n} - (n^2 - 13n - 24)y_0\alpha'_{0n} + n(3n^2 + 5n - 8)\alpha_{0n} = 0.$$

Уравнение (14) и последнее уравнение сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\tilde{\alpha}_{01ss} + 5\tilde{\alpha}_{01s} = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_{0nsss} + (3n + 7)\tilde{\alpha}_{0nss} - (n^2 - 10n - 16)\tilde{\alpha}_{0ns} - n(3n^2 + 5n - 8)\tilde{\alpha}_{0n} = 0, \quad (17)$$

где  $\alpha_{01}(\tau) = \tilde{\alpha}_{01}(s)$ ,  $\alpha_{0n}(\tau) = \tilde{\alpha}_{0n}(s)$ ,  $s = \ln |1 - \tau|$ ,  $n \geq 2$ .

Из (9), (11) при подстановке (13) следует уравнение для определения функции  $\omega_{1n}$

$$y_0 \omega'_{1n} - 2\omega_{1n} = (2n + 1)y_0^{n-2} \alpha'_{0n} + 3n(n - 1)y_0^{n-3} \alpha_{0n} + (n + 1)(n + 5)y_0^{-n-4} \beta_{0n} - 3y_0^{-1} \omega_{0n}. \quad (18)$$

Итак, для нахождения функций  $\alpha_{0n}$ ,  $\beta_{0n}$  при  $n = 1$  нужно решать уравнения (16), (5), при  $n \geq 2$  нужно решать уравнения (17), (15). Функция  $\omega_{0n}$  одинакова при всех  $n$  и вычисляется по формуле (12). Для нахождения функций  $\sigma_{0n}$  и  $\omega_{1n}$  нужно подставить найденные значения  $\alpha_{0n}$ ,  $\beta_{0n}$ ,  $\omega_{0n}$  в (13) и (18) соответственно.

При вычислении функций нулевого приближения  $\alpha_{0n}$ ,  $\beta_{0n}$ ,  $\sigma_{0n}$ ,  $\omega_{0n}$  и функции первого приближения  $\omega_{1n}$  по параметру  $\varepsilon$  использовались уравнения, полученные приравниванием нулю слагаемых при  $\varepsilon$  и не содержащих  $\varepsilon$ . Из уравнений (5)–(11) нельзя определить функции  $\alpha_{1n}$ ,  $\beta_{1n}$ ,  $\sigma_{1n}$ . Для этого нужно сделать вычисления с точностью до квадратичных слагаемых по  $\varepsilon$ .

Далее будем рассматривать  $\tau < 1$ , что соответствует вычислениям из § 4.

При  $n = 1$  функции  $\alpha_{01}$ ,  $\beta_{01}$ ,  $\sigma_{01}$ ,  $\omega_{01}$ ,  $\omega_{11}$  имеют вид:

$$\alpha_{01} = C_1 + C_2(1 - \tau)^{-5},$$

$$\beta_{01} = \frac{1}{5}C_1(1 - \tau)^3 + 6C_2(1 - \tau)^{-2} \ln(1 - \tau) + C_3(1 - \tau)^{-2},$$

$$\sigma_{01} = - \left( \frac{1}{5}C_1(1 - \tau) + \frac{1}{2}C_{01}(1 - \tau)^{-2} + (1 - \tau)^{-4} \left( \frac{5}{2}C_2 + 6C_2 \ln(1 - \tau) + C_3 \right) \right),$$

$$\omega_{01} = C_{01}(1 - \tau)^{-2},$$

$$\omega_{11} = 3 \left( -C_{01}(1 - \tau)^{-3} - \frac{4}{5}C_1(1 - \tau)^{-2} \ln(1 - \tau) + (1 - \tau)^{-7} \left( \frac{49}{25}C_2 + \frac{4}{5}C_3 + \frac{24}{5}C_2 \ln(1 - \tau) \right) \right) + C_4(1 - \tau)^{-2},$$



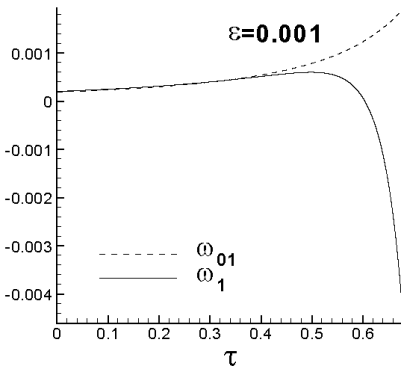


Рис. 8.

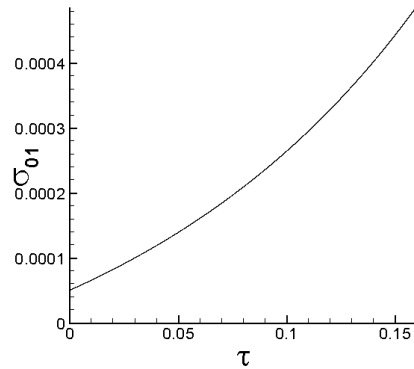


Рис. 9.

где  $C_{01}, C_i$  — постоянные.

Графики функций  $\omega_{01}, \omega_1 = \omega_{01} + \varepsilon\omega_{11}$  при  $\varepsilon = 0.001$  и  $\sigma_{01}$ , задающих соответственно возмущения внешней и внутренней границ оболочки, при  $C_{01} = 0.0001, C_1 = 0.0005, C_2 = 0.0001, C_3 = -0.0005, C_4 = 0.001$  приведены на Рис. 8 и 9 соответственно.

## Список литературы

- [1] Ильгамов М. А. Качественная теория устойчивости сферической формы полости при сжатии в жидкости / в сб. «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина. 2006. С. 8–35.
- [2] Классен Л. Г. О схлопывании полости в идеальной несжимаемой жидкости силами поверхностного натяжения // Динамика сплошной среды. 1973. Вып. 14. С. 106–111.
- [3] Г. Ламб. Гидродинамика. ОГИЗ ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1947. 925 с.