УДК 517.958; 517.929.7

Применение метода специальных рядов для представления решений уравнения нестационарных течений газа[1]

М. Ю. Филимонов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. Для уравнения Линя-Рейснера-Цяня, описывающего нестационарные околозвуковые течения газа, решения строятся в виде специальных рядов по степеням специальным образом выбираемых функций. Такой выбор функций позволяет находить коэффициенты ряда путем последовательного решения как обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, так и линейных уравнений в частных производных. Исследована сходимость построенных рядов.

Ключевые слова: метод специальных рядов, аналитические методы, нестационарные околозвуковые течения газа

1 Введение

При изучении движений невязкого газа в отсутствии массовых сил и в предположении, что течение изэнтропическое и безвихревое, получается одно уравнение второго порядка для потенциала скоростей. Однако, это уравнение достаточно сложно и в ряде случаев его можно упростить. Полный анализ законности упрощений впервые был проведен Линем, Рейснером и Цянем в работе [1], которые рассматривали обтекание тонких тел потоком газа. Оценивая величины различных членов в уравнении для потенциала скоростей, авторы упростили его в некоторых частных случаях. Оказалось, что малые возмущения описываются линейными уравнениями,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05–01–00217)

кроме случая медленно меняющегося во времени околозвукового потока. В последнем случае для двух пространственных переменных для потенциала возмущения $\varphi(x, y, t)$ основного потока, текущего со звуковой скоростью, получается уравнение

$$-\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0, \tag{1}$$

которое использовалось при исследовании околозвуковых движений газа [2]. Уравнение (1) используется для определения проекций вектора скорости на оси декартовой системы координат. Согласно [2] имеем:

$$v_x = a_* \left[1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}}(2m_*)^{-\frac{1}{3}}\varphi_x\right], \quad v_y = \varepsilon a_* \varphi_y,$$

где ε — малый параметр, который характеризует отклонение линий тока от прямой $y = y_0$; m_* — безразмерный коэффициент ($m_* = \dfrac{\gamma+1}{2}$ для идеального газа); γ — показатель адиабаты; a_* — критическая скорость, дающая величину скорости основного потока. Ввиду того, что плоскость $t = \text{const}$ для уравнения (1) является характеристической плоскостью, то задача Коши в данном случае является некорректной, то есть задача совсем не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений [2]. Вопросы о постановке краевых задач и их разрешимости обсуждались в работе Е. В. Мамонтова [3], где доказывались теоремы существования и единственности гладкого решения при некоторых ограничениях на начальные и краевые условия, выполнение которых позволило при доказательстве существования решения использовать теорему Л. В. Овсянникова о разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в шкале банаховых пространств [4].

2 Постановка задачи и построение решений

Следуя работе [3] для уравнения (1) рассмотрим две начально-краевые задачи A и B.

Задача A. В области $D_A = \{(x, y, t) : t \geq 0,\ x \geq 0,\ -\infty < y < \infty\}$ для уравнения заданы начальные данные

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \tag{2}$$

и краевые условия

$$\varphi(0, y, t) = \psi_0(y, t), \qquad \varphi_x(0, y, t) = \psi_1(y, t). \tag{3}$$

Предполагается, что функции $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(y, t)$, $\psi_1(y, t)$ являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям согласования на прямой $x = 0$,

$t=0$, а функция $\psi_1(y,t)>0$. Физический смысл неравенства $\psi_1>0$ состоит в том, что прямая $x=0$ на плоскости x, y все время должна находиться в сверхзвуковой части потока. При сделанных предположениях в [3] доказано существование и единственность решения задачи (1), (2), (3) (задачи A) в некоторой области.

Задача B. В области $D_B=\{(x,y,t): t\geq 0,\ \ x\geq 0,\ \ -1\leq y\leq 1\}$, когда переменная y меняется на конечном промежутке $-1\leq y\leq 1$, можно рассмотреть «задачу со стенками». В этом случае следует задать дополнительные краевые условия

$$\varphi_y(x,1,t)=\varphi_y(x,-1,t)=0. \tag{4}$$

В [3] было показано, что решение задачи (1), (2), (3), (4) (задачи B) существует и единственно в некоторой области.

Для построения решений задач A и B будем использовать метод специальных рядов (метод А. Ф. Сидорова). Опишем данный подход для одного частного случая специальных рядов.

Метод специальных рядов. Рассмотрим общее уравнение в частных производных с искомой функцией $u(\mathbf{x},\mathbf{t})$

$$G\left(u,\ldots,\frac{\partial^{k_0+\cdots+k_m}u}{\partial t^{k_0}\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_m^{k_m}},\ldots\right)=0, \tag{5}$$

где $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$, $k_0+\ldots+k_m\leq N$ (N — порядок уравнения); G — аналитическая в нуле функция своих переменных.

Определим кольцо $K_{\mathbf{g}}$, элементами которого являются абсолютно сходящиеся в некоторой области ряды

$$u(\mathbf{x},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\mathbf{g})P^n(\mathbf{y}), \tag{6}$$

где $g=t$, либо $g=x_l$, $(1\leq l\leq m)$, либо $g=(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$, либо $g=(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},t)$, $(1\leq s\leq m)$. Вектор $\mathbf{y}$ имеет аналогичную структуру, но такую, что для компонент векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{y}$ выполнено соотношение $\mathbf{g}\otimes\mathbf{y}=(\mathbf{x},t)$. Предположим, что функции $\alpha_n(\mathbf{g})$, $P(\mathbf{y})$ имеют соответствующие непрерывные частные производные N-го порядка, и функция $P(\mathbf{y})$ удовлетворяет дифференциальным соотношениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial t}=\sum_{j=1}^{\infty}h_{0j}(\mathbf{g})P^j(\mathbf{y}),\\ \frac{\partial P}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{\infty}h_{ij}(\mathbf{g})P^j(\mathbf{y}),\quad i=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $h_{0j}(\mathbf{g})$, $h_{ij}(\mathbf{g})$ — достаточно гладкие функции такие, что ряды в правых частях уравнений (7) абсолютно сходятся в некоторой области. Условия (7) обеспечивают инвариантность кольца $K_{\mathbf{g}}$ относительно операции частного дифференцирования. Справедливо

Утверждение. *Если функции* $h_{0j}(\mathbf{g})$, $h_{ij}(\mathbf{g})$ $i=\overline{1,m}$, $j\geq 1$ *обеспечивают совместность переопределенной системы* (7), *то ряд* (6) *при соответствующим рекуррентном построении коэффициентов* $\alpha_n(\mathbf{g})$ *является формальным решением уравнения* (5).

Данное утверждение проверяется подстановкой ряда (6) в уравнение (5) и приравниванием выражений при одинаковых степенях $P(\mathbf{y})$. Коэффициенты $\alpha_n(\mathbf{g})$ будут находиться рекуррентно в общем случае уже как решения последовательности линейных уравнений в частных производных (для колец K_t, K_{x_i} как решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений). Такие функции P далее мы будем называть *базисными* (БФ).

Использование рядов K_x. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда K_x

$$\varphi(x,y,t)=a_1x+a_2y+g_1(t)y+g_2(t)+\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)P_1^i(t,x,y), \tag{8}$$

где

$$P_1(t,x,y)=\frac{1}{f(x)+\beta y+t},\quad f(x)\in C^2[0,L],\quad L>0,\quad \beta=\text{const}, \tag{9}$$

a_1, a_2 — постоянные; $g_1(t)$, $g_2(t)\in C^1[0,\infty)$.

Структура ряда (8), (9) определяет краевые условия (3) следующим образом:

$$\begin{gathered}\psi_0(y,t)=a_2y+g_1(t)y+g_2(t)+\sum_{i=1}^{\infty}u_{i0}\frac{1}{(f_0+\beta y+t)^i},\\ \psi_1(y,t)=a_1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_{i1-f_1(i-1)u_{i-1,0}}}{(f_0+\beta y+t)^i},\end{gathered} \tag{10}$$

где f_0, f_1, u_{i0}, u_{i1} — постоянные. Система дифференциальных соотношений для БФ $P_1(t,x,y)$, обеспечивающая рекуррентное нахождение коэффициентов ряда, имеет вид:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t}=-P_1^2,\quad \frac{\partial P_1}{\partial y}=-\beta P_1^2,\quad \frac{\partial P_1}{\partial x}=-f'(x)P_1^2. \tag{11}$$

Теперь после подстановки ряда (8) в уравнение (1) и проведения преобразований с учетом соотношений (11), для нахождения коэффициентов ряда $u_i(x)$ получится последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_i''=R_i(x),$$

где в правые части этих уравнений входят u_k с $k < i$. Положим $f(0)=f_0$, $f'(0)=f_1$. С учетом краевых условий (3), (10) для определения коэффициентов $u_i(x)$ получатся следующие формулы:

$$u_i(x) = \int_0^x \int_0^\tau R_i(\sigma) d\sigma d\tau + u_{i1}x + u_{i0}, \quad i \geq 1.$$

Тогда начальные условия для задачи имеют специальный вид

$$\varphi_0(x,y) = a_1 x + a_2 y + g_1(0) y + g_2(0) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) P_1^i(0,x,y) \tag{12}$$

и порождаются произвольной функцией $f(x)$. Справедлива

Теорема. *Пусть произвольная функция* $f(x) \in C^2[0,L]$, $L > 0$ *и выполнены следующие условия:*

1. $|f'(x)| \leq d, \quad |f''(x)| \leq d, \quad d > 0, \quad 0 \leq x \leq L;$
2. $|u_{i0}| \leq \dfrac{M}{2i^3}, \quad |u_{i1}| \leq \dfrac{M}{2i^2}, \quad i \geq 1, \quad M > 0;$
3. $f(x) > e^{bL} + \beta a, \quad b \geq 2(2+3d)^3[2+\beta^2+M(\pi^2+4)], \quad \beta, a > 0;$
4. $a_1 \geq b^2.$

Тогда решение задачи А с краевыми условиями (3) *и специальными начальными данными* (12) *представимо в виде ряда* (8) *по степеням БФ* (11) *в области* $D_1=\{(x,y,t) \,:\, t\geq 0,\ 0\leq x\leq L,\ y\geq -a\}$.

Для доказательства этой теоремы методом математической индукции устанавливаются следующие неравенства:

$$|u_i(x)| \leq \frac{M}{i^3} e^{bxi}, \quad |u_i'(x)| \leq \frac{Mb}{i^2} e^{bxi}, \quad |u_i''(x)| \leq \frac{Mb^2}{i} e^{bxi}, \quad i\geq 1, \quad 0\leq x\leq L,$$

используя которые нетрудно доказать сходимость ряда (8) по степеням БФ (11) в области D_1 к решению соответствующей задачи.

Использование рядов K_{yt}. Для решения задачи В с точным удовлетворением дополнительных краевых условий рассмотрим ряд

$$\varphi(x,y,t) = a_1 x + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(y,t) P_2^i(x,t), \quad a_1 = \text{const} \tag{13}$$

$$\text{с БФ} \quad P_2(x,t) = \frac{1}{e^{b_1 x} + f(t)}, \quad f(t) \in C^1[0,\infty), \quad b_1 = \text{const}. \tag{14}$$

Пусть начальное условие (2) представимо в виде

$$\varphi_0(x,y) = a_1 x + \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(y) P_2^i(x,0), \tag{15}$$

где $\vartheta_i(y) = \sum\limits_{k=0}^{Ki} b_{k0}^{(i)} \cos k\pi y,$; K — натуральное число; $b_{k0}^{(i)} = \text{const}$.

Подставляя ряд (13) в уравнение (1), и приравнивая выражения при одинаковых степенях P_2, получим последовательность линейных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{2b_1 i}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{a_1 b_1}{2} i u_i + R_i(t,y), \tag{16}$$

где в $R_i(t,y)$ входят коэффициенты u_k с $k < i$.

Для уравнения (16) рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}(-1,t) = \frac{\partial u_i}{\partial y}(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad i \geq 1, \tag{17}$$

$$u_i(y,0) = \vartheta_i(y), \quad -1 \leq y \leq 1. \tag{18}$$

Условие (17) обеспечивает выполнение соотношений (4) на стенках, а условие (18) — удовлетворение начальному условию (15).

Решение задачи (16), (17), (18) будем искать в виде ряда Фурье

$$u_i(y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(i)}(t) \cos k\pi y.$$

Было доказано, что ряд (13) с базисной функцией (14) является решением задачи B с точным удовлетворением дополнительных краевых условий (4), с заданными начальными данными (15) и специальными краевыми условиями, порождаемыми произвольной функцией $f(t)$, в области $D_2=\{(x,y,t)\colon\ t\geq 0,\ 0\leq x\leq L,\ -1\leq y\leq 1\}$.

Список литературы

[1] Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. and Phus. 1948. V. 27, № 3.

[2] Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.:ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.

[3] Мамонтов Е. В. К теории нестационарных околозвуковых течений газа: Диссертация канд.физ.–мат. наук. Новосибирск. 1973.

[4] Овсянников Л. В. Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // ДАН РАН. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.