



УДК 534.2.532

# ЭВОЛЮЦИЯ МАЛОГО ИСКАЖЕНИЯ СФЕРИЧНОСТИ ПУЗЫРЬКА В ДЕЙТЕРИРОВАННОМ АЦЕТОНЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПЛОТНОСТИ ПАРА<sup>1</sup>

*Д. Ю. Топорков*

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

**Аннотация.** Изучается эволюция малого искажения сферической формы парового пузырька в ходе его однократного сверхсильного расширения-сжатия в дейтерированном ацетоне. Сферическая составляющая движения пара и жидкости описывается уравнениями гидродинамики с учетом неравновесных испарения-конденсации на межфазной поверхности. При расчете несферической составляющей движения межфазной границы приближенно учитывается влияние плотности пара и неоднородности пространственного распределения его давления. Установлено, что неустойчивость Рэлея-Тейлора, которая оказывает значительное влияние на форму пузырька в финальной части его сжатия в случае пренебрежения плотностью пара, практически не проявляется в случае ее учета.

**Ключевые слова:** устойчивость сферической формы, паровой пузырек, искажение, дейтерированный ацетон

---

## 1 Введение

В 2002 г. было впервые экспериментально зарегистрировано производство нейтронов и ядер трития при акустическом возбуждении кластера паровых пузырьков в дейтерированном ацетоне [1]. Согласно [1] внутри резонатора с жидким дейтерированным ацетоном без пузырьков формируется стоячая волна давления с амплитудой в 15 бар в пучности. В экспериментах [1] кавитация дейтерированного ацетона вызывается быстрыми нейтронами в момент понижения давления в пучности до значений, близких

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00415) и в рамках программы ОЭМПИУ РАН

к максимальным отрицательным. В фазе отрицательного давления в жидкости нанометровые кавитационные пузырьки многократно увеличиваются и достигают значений порядка миллиметра. Согласно [1], производство нейтронов и ядер трития имеет место на последующей фазе с положительным давлением, где пузырьки стремительно сжимаются. Важным условием здесь является сохранение формы пузырька близкой к сферической до момента максимального сжатия. В настоящей работе изучаются малые искажения сферической формы пузырька в ходе его расширения–сжатия в экспериментальных условиях [1].

## 2 Математическая модель

Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  представляется следующим образом:

$$r = R(t) + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n=-i}^i a_{in}(t) Y_i^n(\theta, \varphi).$$

Здесь  $t$  — время;  $R(t)$  — радиус сферической составляющей формы пузырька (радиус пузырька);  $Y_i^n$  — сферическая гармоника степени  $i$  порядка  $n$ . Параметр  $a_{in}(t)$  характеризует отклонение поверхности от сферы в виде  $Y_i^n$ . Полагается, что относительное искажение сферичности  $\varepsilon_{in}(t) = a_{in}(t)/R(t)$  мало при всех  $i, n$ , то есть  $|\varepsilon_{in}| \ll 1$ . Эволюция  $a_{in}$  от  $n$  не зависит, поэтому далее индекс  $n$  опускается.

Для описания радиальной составляющей движения пара и жидкости используется следующая система уравнений [2, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) &= 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $w$  — радиальная скорость;  $p$  — давление;  $e$  — удельная полная энергия;  $T$  — температура;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Уравнения состояния вещества принимаются в виде  $p = p(\rho, T)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ , где  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия.

Граничные условия имеют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} r = 0 : w = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} &= 0; & r = r_{\infty} : p = p_{\infty}(t), \quad T = T_0; \\ r = R(t) : \dot{R} = w_L + \frac{j}{\rho_L} &= w_G + \frac{j}{\rho_G}, & p_L = p_G - \frac{4\mu_L w_L}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \\ \lambda_L \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R+0} - \lambda_G \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R-0} &= j l(p_G), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_{\infty}(t)$  — давление в жидкости вдали от пузырька;  $\mu_L$  — коэффициент вязкости жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $l$  —

теплота парообразования;  $j$  — интенсивность фазовых превращений, отнесенная к единице времени и единице поверхности. Нижние индексы  $L$  и  $G$  ( $r = R + 0$  и  $r = R - 0$ ) относятся соответственно к параметрам жидкости и газа (пара) (жидкости и газа, но на поверхности пузырька). Параметр  $j$  определяется выражением [2, 3]

$$j = \frac{\alpha'}{\sqrt{2\pi R_G}} \left( \frac{p_S(T)}{\sqrt{T}} - \frac{\chi p_G}{\sqrt{T}} \right),$$

$$\chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega\sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Omega} \exp(-x^2) dx \right), \quad \Omega = \frac{j\sqrt{R_G T}}{\sqrt{2} p}.$$

Здесь  $\alpha'$  — коэффициент аккомодации;  $R_G$  — газовая постоянная для пара;  $p_S$  — давление насыщения.

В (1), (2) вязкость учитывается в приближении несжимаемости жидкости и без учета ее влияния на изменение энергии. Эти допущения здесь являются приемлемыми.

Уравнения состояния парообразного и жидкого дейтерированного ацетона и функции физических параметров этих сред  $\mu_L$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda_L$ ,  $\lambda_G$ ,  $p_S$ ,  $l$  от температуры  $T$  принимаются в виде аппроксимаций [2], построенных по экспериментальным данным. Для расчета радиальной динамики пузырька используется эффективная математическая модель, в которой процесс расширения и сжатия пузырька подразделяется на две стадии [2, 3]. В первой и наиболее продолжительной низкоскоростной стадии, включающей всю фазу расширения и начало фазы сжатия пузырька, применяются не сами уравнения (1), (2), а их значительно более простые приближения. Жидкость возле пузырька в них полагается вязкой несжимаемой, а пар в его полости — идеальным с однородным распределением давления. На фазе высокоскоростного сжатия, где указанные приближения несправедливы, используется математическая модель (1), (2).

Для описания изменения отклонения  $a_i$  применяется модель [4], модифицированная для учета влияния плотности пара согласно [5],

$$(1 + q_i)\ddot{a}_i + \left[ 3\frac{\dot{R}}{R} + 2(i+1)(i+2)\frac{\nu_L}{R^2} \right] \dot{a}_i + \left[ \omega_i^2 + \frac{4\nu_L(i^2-1)\dot{R}}{R^3} - \right.$$

$$\left. -(1-q_i)(i-1)\frac{\ddot{R}}{R} \right] a_i + \frac{i(i+1)}{R} \left[ \frac{\nu_L Q_i(R, t)}{R} + \frac{2\nu_L(2i+1)}{R^{2-i}} \alpha_i + \frac{\dot{R}}{R} \beta_i \right] = 0, \quad (3)$$

$$\alpha_i = -\frac{i+1}{2i+1} \int_R^\infty \frac{Q_i}{r^i} dr, \quad \beta_i = \int_R^\infty \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \left( \frac{R}{r} \right)^i Q_i dr,$$

$$q_i = \frac{(i+1)\bar{\rho}_G}{i\rho_{L0}}, \quad \omega_i^2 = \frac{\sigma(i^2-1)(i+2)}{\rho_{L0}R^3}.$$

Здесь  $\bar{\rho}_G$  — средняя плотность пара;  $\rho_{L0}$  — невозмущенное значение плотности жидкости;  $\nu_L = \mu_L/\rho_{L0}$  — кинематический коэффициент вязкости. Функция  $Q_i(r, t)$  вводится выражением [4]

$$\nabla \times \mathbf{w} = \nabla \times \left( \sum_{i=2}^{\infty} Q_i(r, t) Y_i(\theta, \varphi) \right) \mathbf{e}_r,$$

где  $\mathbf{w}$  — вектор скорости жидкости;  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор вдоль радиальной координаты  $r$ . Функция  $Q_i(r, t)$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \dot{R} R^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{Q_i}{r^2} \right) + \nu_L \left[ \frac{i(i+1) Q_i}{r^2} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial r^2} \right] = 0$$

с граничными условиями

$$Q_i(R, t) = \frac{2}{i+1} [(i+2)\dot{a}_i - (i-1)\frac{\dot{R}}{R} a_i + (2i+1)R^{i-1}\alpha_i], \quad Q_i(\infty, t) = 0.$$

Давление в жидкости вдали от пузырька  $p_\infty$  изменяется по закону

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $\Delta p$  и  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний давления;  $p_0$  — статическое давление в жидкости;  $\varphi_0$  — фаза колебания давления в момент включения источника нейтронов.

Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$R = R_0, \quad \dot{R} = \dot{R}_0,$$

$$0 \leq r \leq R : T(r, t) = T_0, \quad p(r, t) = p_S(T_0),$$

$$R \leq r \leq \infty : T(r, t) = T_0, \quad \rho(r, t) = \rho_{L0},$$

где  $R_0, \dot{R}_0, T_0$  — начальные значения радиуса пузырька, радиальной скорости и температуры жидкости. В момент возникновения искажения  $t_*$  принимается  $a_i = a_{i*}, \dot{a}_i = 0; Q_i(r, t_*) = 0, R \leq r \leq \infty$ .

Значения начальных данных принимаются соответствующими дейтерированному ацетону при  $T_0 = 273$  К и  $p_0 = 1$  бар. Полагается  $\varphi_0 = \pi/4$ , когда  $p_\infty = p_0 - \Delta p = -14$  бар. Принимается, что  $R_0 = R_{cr}$ , а  $\dot{R}_0 = 0 - 30$  м/с. Правая граница рассматриваемого диапазона изменения  $\dot{R}_0$  примерно равна скорости расширения пузырька при  $\ddot{R} = 0$ , что приближенно выполняется на продолжительном участке роста пузырька. Пар в пузырьке в начальный момент времени полагается в состоянии насыщения.

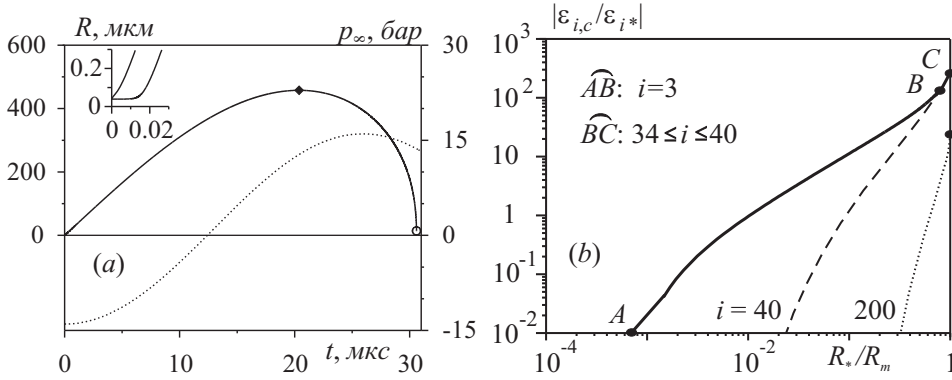


Рис. 1.

### 3 Результаты

На Рис. 1(a) показаны зависимости  $p_\infty(t)$  и  $R(t)$  в ходе расширения-сжатия пузырька. Отмечены значения радиуса пузырька в моменты его максимального расширения (ромбик,  $R_m \approx 457$  мкм) и экстремального сжатия пара в пузырьке (кружок,  $R_c \approx 14$  мкм). Влияние начальной скорости расширения пузырька  $\dot{R}_0$  проявляется только в самом начале расширения при радиусах, близких к критическому  $R_{cr} \approx 0.04$  мкм (вставка на Рис. 1(a), и в целом на изменение радиуса пузырька оказывается несущественным (кривые для разных  $\dot{R}_0$  графически совпадают)

На Рис. 1(b) для ряда значений  $i$  представлены зависимости амплитуды относительного искажения сферичности пузырька в момент экстремального сжатия пара  $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i*}|$  от радиуса пузырька  $R_*$ , при котором возникают эти искажения. Приведена также и огибающая таких зависимостей для  $i \geq 2$ . Огибающая показывает максимально возможные значения  $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i*}|$ . Если возмущения ( $\varepsilon_{i*}$ ) возникают в стадии роста пузырьков при радиусах много меньше максимального ( $R_*/R_m < 10^{-2}$ ), то к моменту экстремального сжатия пара амплитуда возмущений не превышает начальные значения ( $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i*}| < 1$ ). При этом в случае  $R_* \approx R_{cr}$  максимально возможные значения  $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i*}|$  оказываются меньше, чем  $\sim 10^{-3}$ . Наибольший рост амплитуды возмущений (до  $\sim 300$  раз) получается тогда, когда эти возмущения возникают при размерах пузырька, близких к максимальным ( $R_* \approx R_m$ ).

Из сравнения с результатами работы [6], полученными без учета влияния плотности пара и неоднородности его давления при описании эволюции отклонения (при  $q_i = 0$  в уравнении (3)), можно заключить, что влияние указанных факторов на характер зависимости амплитуды относительного искажения  $|\varepsilon_{i,c}/\varepsilon_{i*}|$  от радиуса пузырька  $R_*$  незначителен. При  $q_i = 0$  максимальные значения амплитуды искажения в момент экстремального

сжатия пара несколько больше, чем при  $q_i \neq 0$ . В частности, при  $R_* \approx R_m$  оно оказывается больше  $\approx$  в 2.5 раза. Завышение искажения объясняется влиянием неустойчивости Рэля-Тейлора при торможении схлопывания пузырька в финальной части его сжатия, которая при  $q_i \neq 0$  практически не проявляется. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что на фазе торможения сжатия пузырька средняя плотность пара превосходит плотность жидкости.

## 4 Заключение

Таким образом, учет влияния плотности пара и неоднородности его давления согласно (3) показал уменьшение значения искажения на момент коллапса в несколько раз по сравнению с результатами работы [6]. При этом порядок степени роста искажения к коллапсу не изменяется: при любых  $R_*$  и  $i$  она остается меньше  $10^3$  раз.

## Список литературы

- [1] Taleyarkhan R. P., West C. D., Cho J. S., Lahey R. T. (Jr.), Nigmatulin R. I., Block R. C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. // *Science*. 2002. V. 295. Pp. 1868–1873.
- [2] Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Topolnikov A. S., Bolotnova R. Kh., Vakhitova N. K., Lahey R. T. (Jr), Taleyarkhan R. The Theory of Supercompression of Vapor Bubbles and Nano-Scale Thermonuclear Fusion // *Physics of Fluid*. 2005. V. 17. 107105.
- [3] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1987.
- [4] Prosperetti A. Viscous effects on perturbed spherical flows // *Quarterly of Appl. Math*. 1977. V. 34. Pp. 339–352.
- [5] Lin H., Storey B.D. and Szeri A.J. Rayleigh–Taylor instability of violently collapsing bubbles // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14, № 8. Pp. 2925–2928.
- [6] Нигматулин Р. И., Аганин А. А., Ильгамов М. А., Топорков Д. Ю. Искажение сферичности парового пузырька в дейтерированном ацетоне // *ДАН*. 2006. Т. 408, № 6. С. 767–771.