



УДК 622.692

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БЕЗИНЕРЦИОННОМ СВОБОДНОМ ИСТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ТРУБЫ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

А. Г. Кутушев, А. В. Татосов

Тюменский государственный университет, Тюмень

Аннотация. Рассматривается процесс истечения жидкости из круглой полуограниченной трубы в пространство, затопленное другой жидкостью, обусловленный различием плотностей. Построено автомодельное решение уравнений движения. Дано сравнение с экспериментальными данными.

Ключевые слова: вязкая жидкость, автомодельное решение, течение в каналах

1 Введение

Данная постановка известна в литературе как задача об утечке нефти при гильотинном разрыве подводного трубопровода [1–3]. Полубесконечная горизонтальная труба заполнена одной жидкостью и полностью погружена в другую жидкость (Рис. 1). Состояние покоя не может сохраняться, так как при этом невозможно согласовать давления по разные стороны от границы раздела сред. Вглубь трубы распространяется волна вытеснения, выдавливающая легкую фазу. Основная цель исследования состояла в определении количественных оценок и качественных особенностей процесса истечения жидкости.

2 Математическая постановка задачи

Допущения. Будем считать течение ламинарным с четкой границей раздела жидкостей, капиллярные эффекты не учитываются, модель течения квазиодномерная, длина волны много больше диаметра трубы.

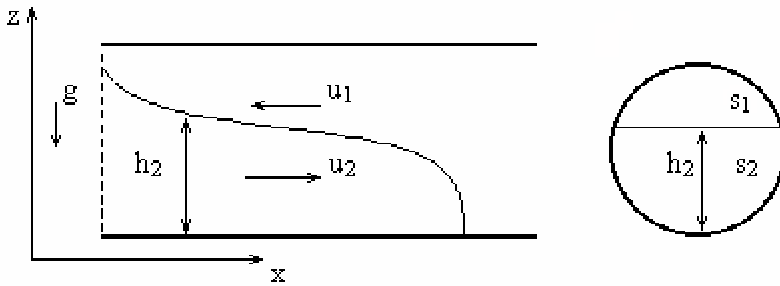


Рис. 1. Схематическое представление задачи; пунктиром показано первоначальное положение границы раздела сред

Обозначения. Пусть p, ρ, u, μ, ν — давление, плотность, скорость динамическая и кинематическая вязкости жидкости; s_1, s_2 и h_1, h_2 — площадь поперечных сечений и высота слоев жидкостей, индексы 1 и 2 относятся соответственно к легкой и тяжелой средам; s, D — площадь сечения и диаметр трубы; g — ускорение свободного падения.

Модель течения. Уравнение импульсов первой (легкой) жидкости в принятом приближении можно представить в виде [4]:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_1 g. \quad (2)$$

Здесь τ_1 — проекция на ось x силы трения, действующей на первую жидкость со стороны ограничивающих ее поверхностей, отнесенная к единице объема.

Из уравнений (1)–(2) находим

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_1 g \frac{\partial z_f}{\partial x} + \tau_1. \quad (3)$$

где p_f — давление на границе раздела жидкостей; z_f — координата точек границы раздела. Аналогично для второй (тяжелой) жидкости

$$\rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_2 g \frac{\partial z_f}{\partial x} + \tau_2. \quad (4)$$

В дальнейшем положим $\partial z_f / \partial x = \partial h_2 / \partial x$. Вычитая из (3) уравнение (4) и пренебрегая инерцией жидкостей, получим следующее основное уравнение совместного движения сред

$$(\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \tau_1 - \tau_2 = 0. \quad (5)$$

Условия неразрывности обоих потоков:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial(s_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial(s_2 u_2)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Связь геометрических параметров зададим в дифференциальной форме

$$d(s_1 + s_2) = 0, \quad (8)$$

$$ds_2 = 2\sqrt{Dh_2 - h^2}dh_2. \quad (9)$$

Уравнения (6)–(9) имеют интегралы

$$s_1 + s_2 = s, \quad s_1 u_1 + s_2 u_2 = 0, \quad s_2 = s_2(h_2).$$

Силу трения в (5) аппроксимируем согласно [2]

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{s_2 u_2}{s^2} \mu(\theta),$$

$$\mu(\theta)/3 = \quad (10)$$

$$\frac{c_1 \theta^4 \mu_1^2 + \theta(1-\theta)\{\theta[c_1(1+\theta) + 2] + (1-\theta)[2 + c_2(2-\theta)]\} \mu_1 \mu_2 + c_2(1-\theta)^4 \mu_2^2}{\theta^3(1-\theta)^3[\theta \mu_1 + (1-\theta)\mu_2]}$$

Здесь $\mu(\theta)$ — эффективная вязкость; $\theta = s_2/s$, $c_1 = 3 - 2\theta$, $c_2 = 1 + 2\theta$. Система уравнений движения дополняется заданием краевых условий. На срезе трубы: $h_2 = h_0$ при $x = 0$; на носике волны: $h_2 = 0$ при $x = L(t)$, если вытекает легкая жидкость и $h_2 = D$ при $x = L(t)$, если вытекает тяжелая жидкость. В данной задаче потребуем максимальной скорости вытеснения жидкости.

3 Автомоделное движение

Автомоделные переменные. Будем искать решение уравнений (5)–(10) в виде:

$$h_2(x, t) = t^p H^* H_2(\xi), \quad s_1(x, t) = t^q S^* S_1(\xi), \quad s_2(x, t) = t^q S^* S_2(\xi), \quad (11)$$

$$u_1(x, t) = t^r U^* U_1(\xi), \quad u_2(x, t) = t^r U^* U_2(\xi), \quad \xi = \frac{x}{E^* t^m}.$$

Здесь: H_2, S_1, S_2, U_1, U_2 — безразмерные функции автомоделной переменной; H^*, S^*, U^*, E^* — размерные постоянные. Подставляя решение в

виде (11) в уравнения (5)–(10) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно автомодельной переменной ξ :

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{d\xi} + \bar{\mu}S_2U_2 &= 0, \\ -m\xi\frac{dS_1}{d\xi} + S_1\frac{dU_1}{d\xi} + U_1\frac{dS_1}{d\xi} &= 0, \quad -m\xi\frac{dS_2}{d\xi} + S_2\frac{dU_2}{d\xi} + U_2\frac{dS_2}{d\xi} = 0, \quad (12) \\ \frac{dS_1}{d\xi} + \frac{dS_2}{d\xi} &= 0, \quad \frac{dS_2}{d\xi} = \frac{8}{\pi}\sqrt{H_2 - H_2^2}\frac{dH_2}{d\xi}, \end{aligned}$$

где $\bar{\mu}$ — «безразмерная вязкость», определяемая равенством

$$\bar{\mu} = 3 \frac{a_1S_2^4\frac{\mu_1}{\mu_2} + S_1S_2\{S_2[a_1(1 + S_2) + 2] + S_1[a_2(1 + S_1) + 2]\} + a_2S_1^4\frac{\mu_2}{\mu_1}}{S_1^3S_2^3\left[S_2\frac{\mu_1}{\mu_2} + S_1\right]},$$

$$a_1 = 1 + 2S_1, \quad a_2 = 1 + 2S_2;$$

найдем значения безразмерных параметров

$$p = q = 0, \quad r = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}$$

и размерных постоянных

$$H^* = D, \quad S^* = \frac{\pi D^2}{4}, \quad U^* = E^* = \sqrt{\frac{\pi(\rho_2 - \rho_1)gD^3}{4\mu_1}}.$$

Уравнения (12) имеют интегралы

$$S_1 + S_2 = 1, \quad S_1U_1 + S_2U_2 = 0, \quad S_2 = S_2(H_2).$$

Система уравнений (12) дополняется краевыми условиями, соответствующими постановке задачи. При истечении легкой жидкости

$$\xi = 0 : \quad H_2 = H_0; \quad \xi = \xi_0 : \quad H_2 = 0,$$

где ξ_0 — неопределенный параметр.

Анализ решения. Распределение безразмерных функций по длине трубы ищем, решая численно краевую задачу. Решение существенно зависит от отношения динамических вязкостей жидкостей. В дальнейшем, если особо не оговаривается, будем считать $\mu_1/\mu_2 = 8.2$. Такая пропорция соответствует системе нефть–вода.

Пусть труба первоначально заполнена легкой жидкостью. На Рис. 2 показана форма и скорость волны вытеснения, распространяющейся в положительном направлении. Решение соответствует максимально быстрой

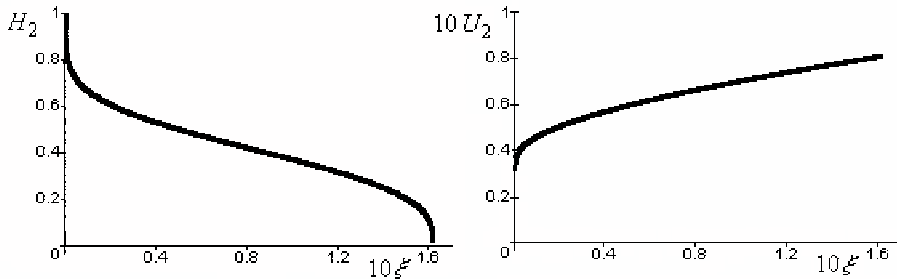


Рис. 2. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной

динамике истечения ($H_0 \rightarrow 1$). Объем вытесненной жидкости определяется, как

$$V(t) = s\omega L(t), \quad L(t) = \xi_0 U^* \sqrt{t}.$$

Для плоского канала объем вытекшей жидкости, отнесенный к единице ширины, есть

$$v(t) = h\omega L(t), \quad L(t) = \xi_0 U_p^* \sqrt{t}, \quad U_p^* = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)gh^3/\mu_1},$$

где ξ_0 — безразмерная координата носика волны; ω — доля вытесненной жидкости

$$\omega = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} S_2(\xi) d\xi.$$

Положение носика волны и доля вытеснения зависят только от отношения динамических вязкостей жидкостей, величина которого является единственным критерием подобия течений. Исследуем влияние вязкости жидкостей на динамику движения. На Рис. 3 представлена зависимость безразмерной координаты ξ_0 носика волны вытеснения от отношения вязкостей μ_1/μ_2 .

Доля вытесненной жидкости изменяется незначительно

$$\omega = a \frac{\mu_1}{\mu_2} + b, \quad 1 \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \leq 9,$$

где $a = -0.004$, $b = 0.438$ — для круглой трубы; $b = 0.455$ — для плоского канала.

На Рис. 4 дано сравнение расчетных и экспериментальных данных объема вытекшей жидкости при гильотинном разрыве подводного нефтепровода [2]. Численные значения параметров нефти и воды в СИ: $\rho_1 = 844$, $\rho_2 = 999$, $10^6 \nu_1 = 10.2$, $10^6 \nu_2 = 1.05$; диаметр трубы $D = 0.103$; для волны вытеснения имеем: $\xi_0 \approx 0.162$, $\omega \approx 0.405$.

Аналогично решается задача об истечении тяжелой жидкости в затопленное пространство. При $\mu_1/\mu_2 = 8.2$ скорость продвижения фронта волны в трубе несколько меньше: $\xi_0 \approx 0.145$, доля вытесненной жидкости больше: $\omega \approx 0.48$.

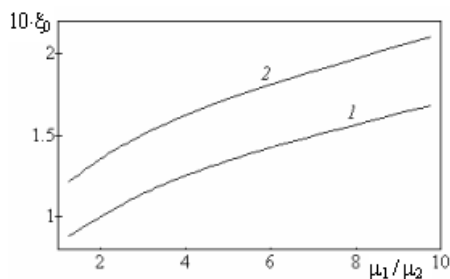


Рис. 3. Зависимость безразмерной координаты носика волны вытеснения от отношения динамических вязкостей жидкостей; кривые 1, 2 соответствуют круглой трубе и плоскому каналу

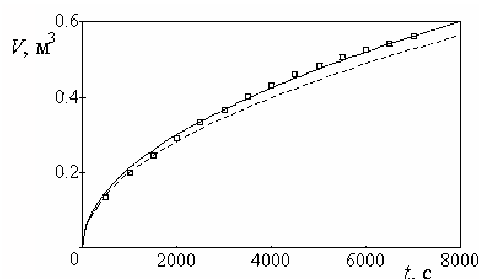


Рис. 4. Сравнение теоретических кривых и экспериментальных данных объема вытесненной нефти от времени: точки — эксперимент [2], пунктир — теоретическая кривая [2], сплошная линия — соответствует приведенному расчету

4 Заключение

Таким образом, в работе найдено и исследовано автомодельное решение задачи о безнапорном истечении жидкости из канала в затопленное пространство. Получена зависимость объема вытекшей жидкости от времени при различных соотношениях вязкостей и плотностей фаз. Установлено, что увеличение отношения динамических вязкостей легкой и тяжелой сред приводит к уменьшению доли вытеснения (при истечении легкой жидкости). При смене ролей обеих жидкостей (истечении тяжелой жидкости) скорость волны уменьшается, а доля вытеснения увеличивается.

Список литературы

- [1] Kranenburg C. Exchange flow of oil and sea-water in a ruptured submarine pipeline // Applied Ocean Research. 1984. Vol. 6, №. 1. Pp. 23–30.
- [2] Kranenburg C., Vegt E. Leakage from ruptured submarine oil pipeline // Journal of Transportation Engineering. 1985. Vol. 111, №. 5. Pp. 570–579.
- [3] Зоненко В. И., Ким Б. И., Минаев В. И. Моделирование утечки нефти при разрыве подводного трубопровода // Нефтепромысловое дело и транспорт нефти. 1985. № 11. С. 24–26.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.