



УДК 534.113

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ШТАНГИ

М. А. Ильгамов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В статической и динамической постановке определяются место и размеры поперечного надреза в вертикальной штанге, растянутой под действием собственного веса и силы, приложенной на нижнем конце. Рассматривается только напряженно-деформированное состояние в пределах упругости для тонкой штанги. Надрез является моделью повреждения штанги, в частности, поперечной раскрытой трещины. Поскольку трещина появляется в результате развития незначительного зародыша, причем необязательно в наиболее напряженном сечении, то предполагается, что надрез может быть в любом месте по длине штанги.

Ключевые слова: штанга, вертикальная штанговая колонна, статическое напряженно-деформированное состояние, вынужденные и свободные продольные колебания, параметр надреза, координата надреза

1 Введение. Постановка задачи

Рассматривается напряженно-деформированное состояние прямой штанги, закрепленной верхним концом неподвижно и растянутой под действием собственного веса и силы, приложенной к нижнему концу (Рис. 1). Предполагается, что в штанге имеется короткий участок (по сравнению с общей ее длиной) с меньшей площадью поперечного сечения. Этот надрез не приводит к изгибу штанги и моделирует ее повреждение, в частности, повреждение типа раскрытой трещины. Задача состоит в определении координаты надреза и его размеров в приближении гипотезы плоских сечений.

Обозначим через L , F длину и площадь поперечного сечения штанги, E , ρ , μ — модуль упругости, плотность и коэффициент внутреннего

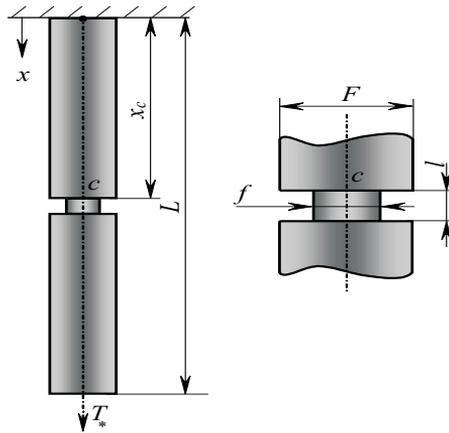


Рис. 1. Схема вертикальной штанги с надрезом

трения, через l , f — длину и площадь поперечного сечения надреза, x_c — его координату, u_* , T_* — перемещение и силу натяжения штанги. Между напряжением σ_* и деформацией ε_* принимается следующая зависимость

$$\sigma_* = E \left(\varepsilon_* + \mu \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial t} \right), \quad \varepsilon_* = \frac{\partial u_*}{\partial x}. \quad (1)$$

В соответствии со сказанным имеем

$$E \left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u_*}{\partial x^2 \partial t} \right) - \rho \left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} - g \right) = 0, \quad T_* = EF \left(\frac{\partial u_*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_*}{\partial x \partial t} \right), \quad (2)$$

где g — ускорение гравитации.

Отсчитывая координату x от точки крепления, запишем граничные условия

$$u_* = 0 \quad (x = 0), \quad T_* = P_0 + P \sin \omega t \quad (x = L). \quad (3)$$

В пределах надреза с короткой длиной l и вблизи него имеется сложное пространственное напряженно-деформированное состояние [1]. Однако здесь для простоты принимаем одноосное растяжение–сжатие, сохраняем соотношение $\sigma_*(\varepsilon_*)$ в виде (1) с коэффициентом трения $\tilde{\mu}$ взамен μ , а также не учитываем инерционные силы. Как показывают экспериментальные результаты [2], средняя величина коэффициента затухания продольных колебаний подвешенной штанги с надрезом при ударе по нижнему торцу на $\sim 20\%$ больше, чем этот коэффициент для такой же штанги без надреза. Учитывая, что коэффициент трения μ имеет место на всей длине L , а коэффициент $\tilde{\mu}$ — только на длине l , можно заключить, что последний значительно больше, чем первый.

Обозначая далее функции при $(x_c - l/2)$ и $(x_c + l/2)$ индексами 1 и 2, запишем условия стыкования решений при $x = x_c$. Принимаем $T_{*1} \approx T_{*2}$ или с учетом (2)

$$\frac{\partial u_{*1}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_{*1}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial u_{*2}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_{*2}}{\partial x \partial t} \quad (x = x_c). \quad (4)$$

В пределах надреза усилие

$$\tilde{T}_* = f \tilde{\sigma} = f E \left(\tilde{\varepsilon}_* + \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} \right)$$

равно тому же усилию T_{*1} (или T_{*2}). Так как средняя деформация в пределах надреза равна $\tilde{\varepsilon}_* \approx (u_{*2} - u_{*1})/l$, то из равенства $\tilde{T}_* \approx T_{*1}$ получаем

$$u_{*2} - u_{*1} + \tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (u_{*2} - u_{*1}) = \frac{lF}{f} \left(\frac{\partial u_{*1}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_{*1}}{\partial x \partial t} \right). \quad (5)$$

Принимая $u_{*1} \sim \sin(2\pi x/L)$, рассмотрим члены

$$\tilde{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left(u_{*1} + \frac{\mu l F}{f \tilde{\mu}} \frac{\partial u_{*1}}{\partial x} \right) \sim \tilde{\mu} \frac{\partial u_{*1}}{\partial t} \left(1 + \frac{2\pi \mu l F}{\tilde{\mu} L f} \right).$$

Учитывая, что $lF/Lf \ll 1$, $\mu < \tilde{\mu}$, в дальнейшем последний член в правой части (5) отбрасываем, в то время как в (2), (4) члены, содержащие коэффициент μ , сохраняются. С учетом сказанного условие (5) представим в виде

$$u_{*2} - u_{*1} = mL \frac{\partial u_{*1}}{\partial x} - \tilde{\mu} \left(\frac{\partial u_{*2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{*1}}{\partial t} \right), \quad m = \frac{lF}{Lf} \quad (x = x_c). \quad (6)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели надреза фигурируют его координата x_c и параметр m . В составе последнего отношение площади поперечного сечения к длине штанги F/L считается известным. В прямой задаче отношение длины надреза к его площади поперечного сечения l/f также известно, в обратной задаче необходимо определение этого отношения. Сами величины l и f в модели не определяются.

Представляя решение системы (2), (3), (4), (6) в виде

$$u_* = u_0(x) + u(x, t), \quad T_* = T_0(x) + T(x, t), \quad (7)$$

рассматриваем статическую задачу

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\rho g}{E} &= 0, & T_0 &= EF \frac{du_0}{dx}, \\ u_0 &= 0 \quad (x = 0), & T_0 &= P_0 \quad (x = L), \\ \frac{du_{02}}{dx} &= \frac{du_{01}}{dx}, & u_{02} - u_{01} &= mL \frac{du_{01}}{dx} \quad (x = x_c) \end{aligned} \quad (8)$$

и динамическую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \quad T = EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right), \\ u = 0 \quad (x = 0), \quad T &= P \sin \omega t \quad (x = L), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t}, \\ u_2 - u_1 &= mL \frac{\partial u_1}{\partial x} - \tilde{\mu} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right), \quad (x = x_c). \end{aligned} \quad (9)$$

2 Статическое состояние

Интегрирование уравнения равновесия из (8) дает

$$u_0 = -\frac{1}{2}qx^2 + Ax + B, \quad q = \frac{\rho g}{E}.$$

Это решение рассматривается отдельно в зонах $0 \leq x \leq x_c$ и $x_c \leq x \leq L$. Определив четыре константы из условий (8), находим перемещения

$$u_0 = -\frac{1}{2}qx^2 + (p_0 + qL)x, \quad p_0 = \frac{P_0}{EF}, \quad 0 \leq x \leq x_c, \quad (10)$$

$$u_0 = -\frac{1}{2}qx^2 + (p_0 + qL)x + mL(p_0 + q(L - x_c)), \quad x_c \leq x \leq L. \quad (11)$$

В (10) не входят параметры надреза. Поэтому по значениям перемещений, деформаций и усилий, измеренных в верхней зоне, нельзя определить его наличие или отсутствие. Так, никакие статические измерения у устья нефтяной скважины не позволяют судить о состоянии штанговой колонны. Передние обрывы штанги добывающей скважины длиной $500 \div 2000$ метров в результате постепенного развития трещины свидетельствуют об этом [2, 4]. Приходим к физически очевидному результату, что верхняя зона ($0 \leq x \leq x_c$) «не чувствует» никакие повреждения в нижней части ($x_c \leq x \leq L$).

Как видно из (11), в случае технических систем, где имеется доступ к нижней зоне штанги, можно судить о наличии надреза. Пусть измеряется перемещение нижнего конца штанги с надрезом при концевой нагрузке P_0 , которое обозначим через $u_{0c}(P_0)$. Расчетное значение определяется по (11). Приравняв их, получаем

$$u_{0c}(P_0) = L \left(p_0 + \frac{1}{2}qL \right) + mL(p_0 + q(L - x_c)). \quad (12)$$

Если измеренное значение нижнего конца штанги без надреза обозначить через $u_0(P_0)$ при той же концевой нагрузке P_0 , то с учетом (11) можно записать

$$u_0(P_0) = L \left(p_0 + \frac{1}{2}qL \right). \quad (13)$$

Вычитая (13) из (12), находим связь между искомыми параметрами m и x_c

$$u_{0c}(P_0) - u_0(P_0) = mL(p_0 + q(L - x_c)). \quad (14)$$

Другую связь между ними можно определить из измерений перемещения нижнего конца при его догрузке или разгрузке на величину P_{01} , так что общая концевая сила при этом будет $P_0 + P_{01}$. Соответствующее экспериментальное значение перемещения обозначим через $u_{0c}(P_0 + P_{01})$, которое приравняем расчетному значению по (12). Будем иметь

$$u_{0c}(P_0 + P_{01}) - u_{0c}(P_0) = p_{01}L(1 + m), \quad p_{01} = P_{01}/EF. \quad (15)$$

Из (14) и (15) определяем расстояние надреза от верхнего конца

$$x_c = L - \frac{p_{01}}{q} \left(\frac{u_{0c}(P_0) - u_0(P_0)}{u_{0c}(P_0 + P_{01}) - u_0(P_0) - Lp_{01}} - \frac{p_0}{p_{01}} \right) \quad (16)$$

и параметр надреза

$$m = \frac{1}{p_{01}L} (u_{0c}(P_0 + P_{01}) - u_{0c}(P_0)) - 1. \quad (17)$$

При пользовании формулами (16), (17) важно определять значения перемещений по показаниям приборов с наибольшей возможной точностью, так как в эти формулы входят разности близких чисел. Это обстоятельство приводит к потере точности в вычислениях и большим погрешностям в определении параметра надреза и координаты его расположения от места замеров перемещений. Применение статического способа определения повреждений в штанге затруднено именно по этой причине.

Отметим, тензометрирование штанги, то есть измерение статической деформации, не позволяет судить о надрезе. Действительно, из (11) находим выражение для деформации

$$\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx} = p_0 + q(L - x),$$

куда не входят параметры надреза.

3 Установившиеся вынужденные колебания

Частное решение задачи (9) при $\mu = \tilde{\mu} = 0$ имеет вид

$$u = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) \sin \omega t \quad (\alpha = \omega/a, \quad a^2 = E/\rho). \quad (18)$$

Четыре константы в этом решении, записанном для областей $0 \leq x \leq x_c$ и $x_c \leq x \leq L$, определяются из четырех граничных условий (9). Имеем

$$u = \frac{p \sin \alpha x \sin \omega t}{\alpha \cos \alpha L (1 - m \alpha L \cos^2 \alpha x_c (\operatorname{tg} \alpha L - \operatorname{tg} \alpha x_c))}, \quad (19)$$

$$p = \frac{P}{EF} \quad (0 \leq x \leq x_c),$$

$$u = \frac{p (m \alpha L \cos^2 \alpha x_c \cos \alpha x + (1 + m \alpha L \sin \alpha x_c \cos \alpha x_c) \sin \alpha x) \sin \omega t}{\alpha \cos \alpha L (1 - m \alpha L \cos^2 \alpha x_c (\operatorname{tg} \alpha L - \operatorname{tg} \alpha x_c))}, \quad (20)$$

$$(x_c < x < L).$$

Так же, как в предыдущем разделе, в динамической задаче можно составить два уравнения для определения параметра m надреза и его координаты x_c с использованием измерений разности амплитуд перемещений нижнего конца штанги с надрезом и без него, а также добавляя амплитуду приложенной внешней силы. Можно исходить из измерений виброускорений и деформаций. В отличие от статического случая, измерения и в верхней части ($0 \leq x \leq x_c$) штанги позволяют судить о параметрах надреза. Разные вопросы локальной приборной диагностики рассматриваются в работах [3, 4].

Другой способ определения m и x_c состоит в анализе собственных частот продольных колебаний штанги с надрезом. Такое исследование выполнено для изгибных колебаний балки в работе [5].

Как видно из (19), (20), частотное уравнение имеет вид:

$$\cos \alpha L - m \alpha L \cos^2 \alpha x_c (\sin \alpha L - \cos \alpha L \operatorname{tg} \alpha x_c) = 0. \quad (21)$$

Для штанги без надреза ($m = 0$) из уравнения $\cos \alpha L = 0$ собственные частоты равны $\alpha L = (2k - 1)\pi/2$ ($k = 1, 2, \dots$) или

$$\omega_k = (2k - 1)a/2L. \quad (22)$$

Член, содержащий m в (21), дает изменение этих частот. В предельном случае, когда надрез находится у нижнего конца $x_c/L = 1$, уравнение (21) вырождается в частотное уравнение для штанги без надреза.

Решение уравнения (21) проверено численно для следующих параметров системы: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7800$ кг/м³, $L = 10$ м. Скорость звука

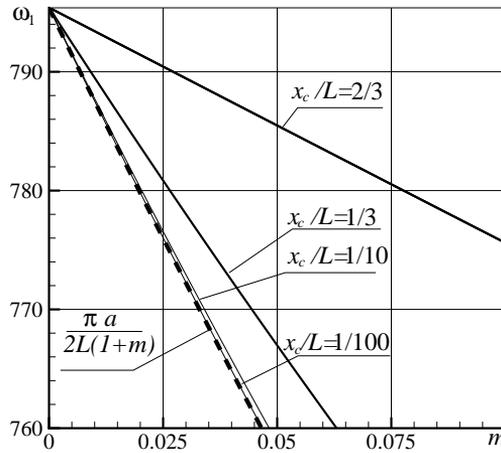


Рис. 2. Зависимость первой круговой частоты ω_1 продольных колебаний штанги от параметра надреза m и его координаты x_c/L , отсчитываемой от верхнего конца

$a = 5063.6$ м/с. При этом первая и вторая собственные частоты штанги без надреза $\omega_1 = \pi a / 2L = 795.4$ рад/с, $\omega_2 = 2386.2$ рад/с. На Рис. 2 приводится зависимость первой собственной частоты колебаний ω_1 от параметра m при разных значениях отношения x_c/L . Эта зависимость для малых значений m является почти линейной. Чем ближе к нижнему концу находится надрез (большие значения x_c/L), тем зависимость ω_1 от m слабее. Как отмечалось выше, при $x_c/L \rightarrow 1$ собственные частоты не зависят от m . Чем ближе надрез к верхнему концу штанги, тем сильнее зависимость собственных частот от параметра m .

Если надрез находится на удалении порядка $x_c/L \sim 0.1$ от верхнего конца штанги, то ослабевают зависимость собственной частоты от отношения x_c/L . Для этого случая и значений параметра $m \sim 0.01$ и меньше можно упростить уравнение (21), исходя из того, что собственные частоты штанги с надрезом не сильно будут отличаться от собственных частот штанги без надреза. Полагаем для первой собственной частоты ($k = 1$)

$$\alpha L = \pi/2 + \delta.$$

Пренебрегая величинами δ^2 , $(x_c/L)^2$, $\delta x_c/L$ по сравнению с единицей и учитывая, что

$$\sin(\pi/2 + \delta) = \cos \delta \approx 1, \quad \cos(\pi/2 + \delta) = -\sin \delta \approx -\delta,$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \frac{x_c}{L} \approx 1, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \frac{x_c}{L} \approx \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \frac{x_c}{L},$$

представим уравнение (21) в приближенном виде

$$\left(1 + m + \frac{\pi^2 m x_c}{4L}\right) \delta = -\frac{\pi m}{2}.$$

Отсюда первая собственная частота равняется

$$\omega_1 = \frac{a}{L} \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = \frac{\pi a}{2L} \left(1 - \frac{m}{1 + m(1 + \pi^2 x_c/4L)}\right). \quad (23)$$

При $x_c/L \ll (\pi/2)^2$ по этой формуле первая собственная частота не зависит от места расположения надреза

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{2L(1 + m)}. \quad (24)$$

Как видно из Рис. 2, формула (24) удовлетворительно описывает зависимость $\omega_1(m)$ при указанных выше ограничениях. Здесь показана также зависимость по (23) при $x_c/L = 1/3$, которая практически совпадает с результатом при $x_c/L = 0.01$.

Для определения второй собственной частоты ω_2 ($k = 2$) положив

$$\alpha L = 3\pi/2 + \delta,$$

и ограничиваясь первыми двумя членами разложений в степенные ряды тригонометрических функций, приводим уравнение (21) к виду

$$\delta \left(1 + m + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 m \frac{x_c}{L}\right) + \frac{3\pi m}{2} \left(1 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{x_c}{L}\right)\right) = 0.$$

Поэтому приближенное выражение собственной частоты ω_2 при малых значениях m , x_c/L имеет вид:

$$\omega_2 = \frac{a}{L} \left(\frac{3\pi}{2} + \delta\right) = \frac{3\pi a}{2L} \left(1 - \frac{m \left(1 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{x_c}{L}\right)^2\right)}{1 + m \left(1 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \frac{x_c}{L}\right)}\right). \quad (25)$$

При $(x_c/L)^2 \ll 3(\pi/2)^2$ выражение (25) принимает ту же форму, что (23) (вместо $\pi/2$ фигурирует множитель $3\pi/2$). При $x_c/L \ll (\pi/2)^2$ из (25) следует независимость второй собственной частоты от координаты x_c/L

$$\omega_2 = \frac{3\pi a}{2L(1 + m)}. \quad (26)$$

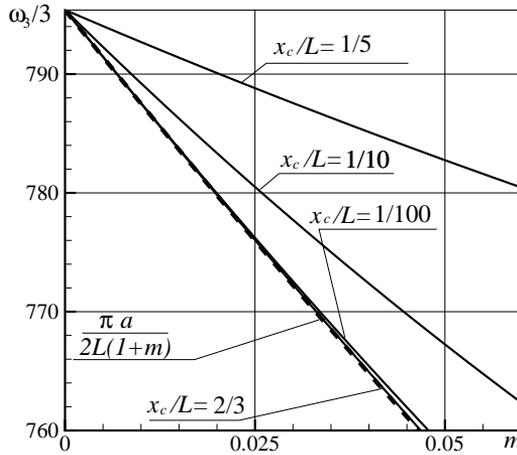


Рис. 3. Зависимость второй круговой частоты ω_2 продольных колебаний штанги от параметра надреза m и его координаты x_c/L , отсчитываемой от верхнего конца

На Рис. 3 показана зависимость $\omega_2(m, x_c/L)$ по результатам численного решения частотного уравнения (21). Здесь по формуле (26) при принятых допущениях также имеется удовлетворительное согласие с результатами численного решения, однако это согласие хуже, чем для ω_1 . Это объясняется большим показателем изменяемости (более короткими волнами) продольных колебаний штанги. На Рис. 3 обращает на себя внимание зависимость $\omega_2(m)$ для $x_c/L = 2/3$. Она весьма близка к результатам при малых значениях x_c/L (на рисунке 0.01) и характеризуется наиболее сильной зависимостью собственной частоты от параметра надреза. Это объясняется тем, что надрез с координатой $x_c/L = 2/3$ находится вблизи узла продольных перемещений при второй гармонике (другой узел у верхнего закрепленного конца). В этих точках по длине имеют место максимальные деформации $\partial u/\partial x$ (пучности деформаций). Из (9) при $\tilde{\mu} = 0$ имеем соотношение

$$u_2 - u_1 = mL \partial u_1 / \partial x,$$

в котором правая часть является максимальной для указанных точек по длине. Таким образом, влияние надреза, находящегося вблизи точек $x_c/L = 0$ и $2/3$, является максимальным для второй собственной частоты. Наоборот, при $x_c/L \approx 1/3$ (пучность перемещений, узел деформаций) это влияние минимально. Можно сказать, что наличие надреза, находящегося вблизи этой точки, не обнаруживается по второй собственной частоте (так же, как в случае надреза около нижнего конца штанги).

По известным из показаний приборов собственным частотам $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$

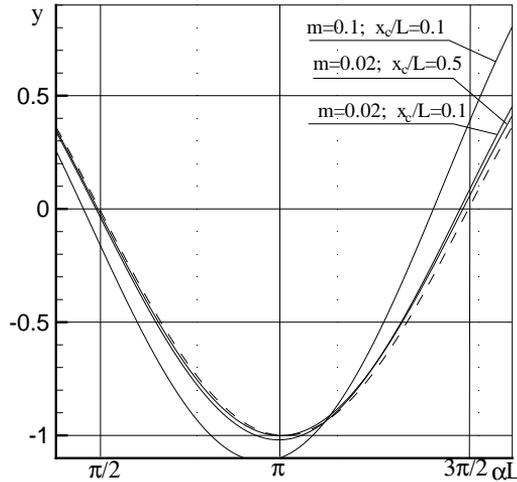


Рис. 4. Зависимость функций y от параметра αL для разных параметров надреза; пунктирная кривая — по формуле (30), сплошные — по формуле (31)

можно определить параметр m и координату x_c надреза. Для случая (23) и (25) (в последнем принято $(x_c/L)^2 \ll 3(\pi/2)^2$) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 \frac{2L}{\pi a} &= 1 - \frac{m}{1 + m(1 + \pi^2 x_c/4L)}, \\ \tilde{\omega}_2 \frac{2L}{3\pi a} &= 1 - \frac{m}{1 + m(1 + 9\pi^2 x_c/4L)}.\end{aligned}\quad (27)$$

Вводя в эти уравнения обозначения собственных частот для штанги без надреза ω_1 и ω_2 по (22), а также отношения измеренных собственных частот колебаний штанги с надрезом к частотам ω_1, ω_2

$$f_1 = \tilde{\omega}_1/\omega_1, \quad f_2 = \tilde{\omega}_2/\omega_2, \quad (28)$$

находим

$$m = \frac{8(1 - f_1)(1 - f_2)}{9f_1(1 - f_2) - f_2(1 - f_1)}, \quad \frac{x_c}{L} = \frac{f_2 - f_1}{2\pi^2(1 - f_1)(1 - f_2)}. \quad (29)$$

Поскольку собственные частоты штанг с дефектом всегда меньше собственных частот штанг без дефекта ($f_1 < 1, f_2 < 1$), то значения m и x_c положительны. Отметим, с увеличением номера моды колебаний частота для штанги с надрезом все меньше отличается от частот для целой штанги ($f_k \rightarrow 1$). Если, например, $f_1 = 0.92, f_2 = 0.94$, то по формулам (26) находим $m = 0.091, x_c/L = 0.21$.

На Рис. 4 приводятся зависимости функций

$$y = \cos \alpha L, \quad (30)$$

$$y = 1 - m\alpha L \cos^2 \alpha x_c (\operatorname{tg} \alpha L - \operatorname{tg} \alpha x_c). \quad (31)$$

от параметра αL , где также видно смещение собственных частот продольных колебаний штанги с надрезом с разными параметрами.

Автор выражает благодарность А. Г. Хакимову за помощь в выполнении работы.

Список литературы

- [1] Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 450 с.
- [2] Разянцев А. О. Виброакустическая диагностика глубиннонасосных штанг в процессе эксплуатации. Диссертация к.т.н., Уфа: УГНТУ, 1999, 108 с.
- [3] Балицкий Ф. Я., Иванова Н. А., Соколова А. Г., Хомяков Е. И.. Виброакустическая диагностика зарождающихся дефектов. М.: Наука, 1984. 120 с.
- [4] Окрушко Е. И., Ураксеев М. А. Дефектоскопия глубиннонасосных штанг. М.: Недра, 1983. 112 с.
- [5] Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Электронный журнал «Техническая акустика». 2005. № 5. 7 с.