УДК 517.946; 519.46

Интегрируемые двумерные динамические системы и характеристические алгебры Ли[1]

А. В. Жибер, О. С. Костригина

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация. В работе показано, что двумерная динамическая система уравнений интегрируема по Дарбу, если ее характеристическая алгебра Ли конечномерна, и наоборот. Описан класс систем уравнений, обладающих полным набором интегралов первого и второго порядка.

Ключевые слова: интегралы, характеристическая алгебра Ли, инварианты Лапласа

1 Введение

Работа посвящена классификации двумерных систем

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \ (u^i_{xy} = F^i, \ i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

обладающих полным набором $x-$ и $y-$интегралов.

Рассмотрим набор независимых переменных:

$$u, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \ldots, u_n, \bar{u}_n, \ldots,$$

где

$$u_1 = u_x, \ \bar{u}_1 = u_y, \ u_2 = u_{xx}, \ \bar{u}_2 = u_{yy}, \ldots.$$

Обозначим через $\bar{D}(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной $y(x)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05–01–00775–а, 06–01–92051–КЭ–а)

Определение 1. *Функция $W(u, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ называется $x-$интегралом порядка m системы (1), если $\bar{D}(W) = 0$. Аналогично, $y-$интеграл m-го порядка — это функция $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar{W}) = 0$.*

$X-$интегралы $W^1,\ W^2, \ldots, W^k$ называются независимыми, если $D^i W^j$ функционально независимы. В статье [1] показано, что максимальное число независимых $x-$интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 2. *Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых $x-$ и $y-$интегралов.*

Понятие характеристической алгебры Ли было введено в [2] для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(u),\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

(см. также [3–6]).

Определим $x-$ и $y-$характеристические алгебры Ли системы уравнений (1). Пусть F — пространство локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\bar{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots, u_k \ldots$ Оператор $\bar{D}$ на функциях из F действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{u}^i_2 X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1},\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$X_{n+1} = \bar{u}^i_1 \frac{\partial}{\partial u_i} + F^i \frac{\partial}{\partial u^i_1} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_2} + \ldots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u^i_k} + \ldots$$

$X-$характеристическая алгебра Ли уравнений (1) есть алгебра A, порожденная векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется $y-$характеристическая алгебра Ли $\bar{A}$.

В статье [3] приведены примеры систем с характеристическими алгебрами Ли A и $\bar{A}$ размерности 5.

2 Критерий интегрируемости по Дарбу

В статьях [2, 4] показано, что система (2) обладает полным набором $x-$интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра конечномерна. В этом пункте мы обобщаем этот результат на уравнения (1). А именно справедливо утверждение.

Теорема 1. *Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу если и только если, характеристические алгебры Ли A и $\bar{A}$ конечномерны. При* *этом если n_k — число x−интегралов k-го порядка, $k = 1, 2, \dots, m$, то*

$$\dim A = n + \sum_{i=1}^{m} i n_i. \tag{3}$$

Приведем краткую схему доказательства Теоремы 1.

Пусть система уравнений (1) интегрируема по Дарбу. Тогда существует набор x−интегралов $\omega^i(u, u_1, \dots, u_s)$, $i = 1, 2, \dots, n$ порядка s, удовлетворяющий условию

$$\det\left(\frac{\partial\omega^i}{\partial u_s^j}\right) \neq 0. \tag{4}$$

Теперь в силу (4) от переменных $\bar u_1, u, u_1, \dots, u_m, \dots$ можно перейти к набору независимых переменных $\bar u_1, u, u_1, \dots, u_{s-1}, \omega, \omega_1, \dots, \omega_m, \dots$, где $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$, $\omega_k = D^k\omega$, $k = 1, 2, \dots$. В новых переменных оператор X_{n+1} запишется так

$$\tilde X_{n+1} = \bar u_1^i \frac{\partial}{\partial u_i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i)\frac{\partial}{\partial u_2^i} + \dots + D^{s-2}(F^i)\frac{\partial}{\partial u_{s-1}^i}.$$

Ясно, что алгебра Ли, порожденная элементами $X_1, \dots, X_n, \tilde X_{n+1}$ конечномерна.

Обратно, предположим, что алгебра A конечномерна. Обозначим через L линейную оболочку элементов $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ясно, что

$$A = L \oplus B.$$

Удобно в дальнейшем рассматривать подалгебру B. Последняя содержит элементы вида

$$\tilde X_i = [X_i, X_{n+1}] = \frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha_{i1}^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + \alpha_{i2}^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если $\dim B = n$, то B есть линейная оболочка элементов $\tilde X_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, и система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha_{i1}^k \frac{\partial}{\partial u_1^k}\right)\omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

имеет n функционально независимых решений $\omega^i(u, u_1)$, образующих полный набор x−интегралов первого порядка. В этом случае, так как $\dim L = n$ и $m = 1$, $n_1 = n$, то формула (3) верна.

Пусть $\dim B = n + 1$. Тогда базис алгебры B состоит из элементов $\tilde X_i$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, где

$$\tilde X_{n+1} = \alpha_{n+1\ m}^k \frac{\partial}{\partial u_m^k} + \alpha_{n+1\ m+1}^k \frac{\partial}{\partial u_{m+1}^k} + \dots,\ m \geq 1.$$

Если $m=1$, то система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}+\alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1}\right)\omega=0,\quad \alpha^k_{n+1\ 1}\frac{\partial\omega}{\partial u^k_1},\quad i=1,2,\dots,n$$

имеет $n-1$ функционально независимых решений $\omega^i(u,u_1)$, которые являются $x-$интегралами.

Далее рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}+\alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1}+\alpha^k_{i2}\frac{\partial}{\partial u^k_2}\right)W=0,\\ \left(\alpha^k_{n+1\ 1}\frac{\partial}{\partial u^k_1}+\alpha^k_{n+1\ 2}\frac{\partial}{\partial u^k_2}\right)W=0,\quad i=1,2,\dots,n.\end{gathered}\tag{5}$$

Система уравнений (5) имеет $2n-1$ функционально независимых решений

$$W,\ \omega^i,\ D\omega^i,\quad i=1,2,\dots,n-1,$$

при этом $\operatorname{ord}W=2$. Таким образом, исходная система (1) обладает полным набором $x-$интегралов $\omega^1,\omega^2,\dots,\omega^{n-1},W$. При этом справедлива формула (3), так как $n_1=n-1,n_2=1$.

Аналогично рассматриваются случаи $m>1$ и $\dim B>n+1$.

3 Системы уравнений с интегралами первого порядка

В этом пункте рассматриваются системы уравнений (1) с полным набором $x-$ и $y-$интегралов $\omega^i(u,u_1),\ \bar\omega^i(u,\bar u_1),\ i=1,2,\dots,n$.

Из уравнений

$$\bar D(\omega_i)=0,\ D(\bar\omega_i)=0,\quad i=1,2,\dots,n$$

следует, что правая часть системы (1) имеет вид

$$F^i(u,u_1,\bar u_1)=-\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1,\quad i=1,2,\dots,n.\tag{6}$$

Теорема 2. *Система уравнений (1), (6) обладает максимальным числом $x-$ и $y-$интегралов первого порядка если и только если, выполнены соотношения*

$$\begin{aligned}\tilde R^i_{pqj}&=\frac{\partial}{\partial u^q}\Gamma^i_{pj}-\frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq}+\Gamma^s_{pj}\Gamma^i_{sq}-\Gamma^i_{vj}\Gamma^v_{pq}=0,\\ R^i_{qpj}&=\frac{\partial}{\partial u^p}\Gamma^i_{jq}-\frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq}+\Gamma^i_{ps}\Gamma^s_{jq}-\Gamma^i_{jv}\Gamma^v_{pq}=0.\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь R^i_{qpj} — тензор Римана, а $\tilde{R}^i_{pqj}$ — сопряженный тензор Римана.

$X-$ интегралы $\omega^i(u, u_1)$ задаются формулами

$$\omega^i(u, u_1) = A^i_s(u) u^s_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции $A^i_s(u)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^k} A^i_s(u) - \Gamma^j_{sk} A^i_j(u) = 0. \tag{8}$$

Условие совместности уравнений (8) записывается как $\tilde{R}^i_{pqj} = 0$ (см. (7)).

Отметим, что соотношения (7) эквивалентны тому, что инварианты Лапласа линеаризованной системы уравнений для системы (1), (6) есть нулевые матрицы.

Для двухкомпонентных систем (1) справедливо утверждение.

Теорема 3. *Любая система уравнений (1) ($n = 2$) с полным набором $x-$ и $y-$интегралов первого порядка точечным преобразованием $u = \phi(v)$ приводится к следующей*

$$v^i_{xy} = v^2_x v^1_y - v^k_x v^k_y \frac{\partial}{\partial v^k} \ln\left(p(v^1) + q(v^2)\right), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Интегралы системы (9) вычисляются по формулам

$$\omega_1 = v^1_x - v^2_x,\ \omega_2 = \left[e^{-v^1} p(v^1) + s(v^1)\right] v^1_x + \left[e^{-v^1} q(v^2) - s(v^1)\right] v^2_x,$$

$$\bar{\omega}_1 = v^1_y - v^2_y,\ \bar{\omega}_2 = \left[e^{-v^2} p(v^1) - r(v^2)\right] v^1_y + \left[e^{-v^2} q(v^2) + r(v^2)\right] v^2_y,$$

где функции $s(v^1),\ r(v^2),\ p(v^1)$ и $q(v^2)$ связаны соотношениями

$$s'(v^1) = e^{-v^1} p(v^1),\ r'(v^2) = e^{-v^2} q(v^2).$$

4 Двухкомпонентные системы уравнений

Здесь мы рассматриваем системы (1) при $n = 2$, обладающие тремя интегралами первого порядка и одним второго.

Теорема 4. *Любая невырожденная система уравнений (1) с интегралами*

$$\omega^1(u, u^1),\ \omega^2(u, u_1, u_2),\ \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1),\ \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1) \tag{10}$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов:

$$u^i_{xy} = \Gamma^i_{kj}(u) u^k_1 \bar{u}^j_1,\ i = 1, 2$$

или

$$u^1_{xy} = u^1_1 \bar{u}^2_1,\ u^2_{xy} = \bar{r}(u, \bar{u}_1) u^1_1. \tag{11}$$

Система (11) обладает интегралами вида (10) тогда и только тогда, когда функция $\bar{r}$ является решением следующего уравнения

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \bar{u}_1^2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}_1^1} + \bar{r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}_1^2} + \bar{u}_1^1 \frac{P'(u^1)}{2} + P(u^1)\bar{u}_1^2 = 0.$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2} u_1^1, \; \omega^2 = u_2^2 - u_1^2 \frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{\left(u_1^2\right)^2}{2} + \frac{1}{2} P(u^1) e^{2u^2} (\omega^1)^2,$$

а $y-$интегралы $\bar{\omega}^1$ и $\bar{\omega}^2$ определяются из уравнения в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \bar{u}_1^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^1} + \bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^2} \right) \bar{\omega} = 0.$$

Список литературы

[1] Гурьева А. М., Жибер А. В. О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 26–33.

[2] Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.

[3] Костригина О. С. О нелинейных гиперболических системах уравнений с конечномерной характеристической алгеброй Ли // Труды теоретической и математической физики. Труды 38-й Региональной молодежной конференции 29 января–2 февраля 2007. УрО РАН ИММ. Екатеринбург. С. 164–168.

[4] Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана. Уфа: Препринт БФ АН СССР, 1981.

[5] Habibullin I. T. Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations // Semmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2005. V. 1, № 23. Pp. 1–9.

[6] Жибер А. В., Муртазина Р. Д. О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$. Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т.12, № 7. С. 65–78.