



УДК 534.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Н. К. Вахитова, Н. А. Махота

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Численно решается задача о распространении акустических волн в цилиндрическом сосуде, заполненном жидкостью. Показана возможность формирования стоячих волн.

Ключевые слова: акустические волны, давление, математическое моделирование, стоячие волны

1 Введение

В работах по пузырьковому термоядерному синтезу [1] указывается на трудности, связанные с созданием и фокусировкой мощных акустических полей (15 бар и более) в малой зоне в жидкости, что требует длительной настройки экспериментальной установки. В данном эксперименте акустическое поле возбуждалось в цилиндрической колбе с кольцевым пьезоэлектрическим возбудителем. В связи с этим, представляет интерес математическое моделирование акустических колебаний жидкости в цилиндрических резонаторах.

2 Математическая модель

Рассматриваются двумерные волновые возмущения в цилиндрическом сосуде с размерами $R = 0.031$ м, $L = 0.2$ м. Сосуд расположен на неподвижной поверхности, верхняя граница жидкости является свободной. Жидкость акустически возбуждается с помощью пьезоэлектрического кольца, расположенного на внешней поверхности стенки сосуда, на котором задается давление

$$p = p_0 + \Delta p \sin \omega t,$$

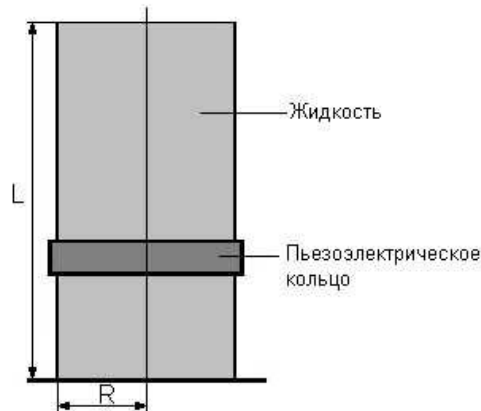


Рис. 1. Цилиндрический сосуд с жидкостью

где p_0 — атмосферное давление; Δp — амплитуда колебаний; ω — частота колебаний. Акустические волны направлены к центральной оси сосуда. Решение поставленной задачи производилось двумя способами: по явной и неявной схеме. Для решения по неявной схеме использовалось волновое уравнение в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

Данное уравнение решалось методом прогонки с применением итераций [2].

Для решения задачи по явной схеме использовались следующие уравнения:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{v_r}{r} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0; \quad (2)$$

– уравнения Эйлера

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad (4)$$

– уравнение состояния

$$p = p_0 + C^2(\rho - \rho_0). \quad (5)$$

Данные уравнения решались с помощью метода Дормана-Принца [3].

Граничные условия:

– на центральной оси $v_r(0, z) = 0$;

– на стенке сосуда выше и ниже кольца $v_r(R, z < z_1, z > z_2) = 0$;

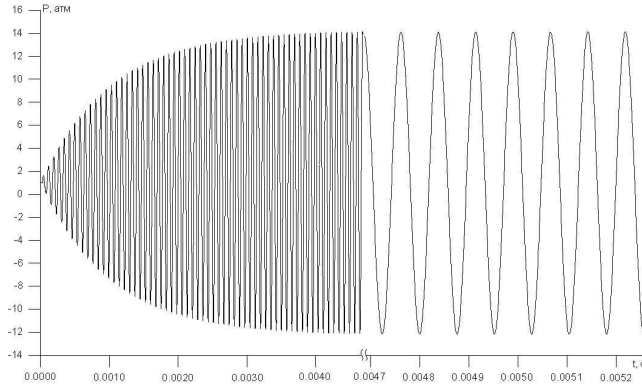


Рис. 2. Изменение давления на центральной оси сосуда при задаваемой частоте 14770 Гц

- на кольце $p(R, z_1 \leq z \leq z_2) = p_0 + \Delta p \sin \omega t$;
 - на дне сосуда $v_z(r, 0) = 0$;
 - на свободной поверхности $p(r, L) = p_0$.
- Начальные условия: $v_r(r, z) = v_z(r, z) = 0, p(r, z) = p_0$.

3 Результаты расчетов

Для начала были проведены расчеты для одномерного случая при различных частотах. Для данных размеров сосуда первая резонансная частота равна 19300 Гц. Поэтому частота варьировалась около этого значения в обоих случаях. Для неявной схемы максимальное усиление амплитуды колебаний наблюдалось на частоте 14770 Гц. На Рис. 2 показано изменение давления на центральной оси сосуда в зависимости от времени. Полученные результаты показывают установление колебаний давления с постоянной амплитудой в жидкости.

На Рис. 3(а) изображены восемь профилей волны через интервал времени равный полупериоду. Совпадение соответствующих графиков подтверждает установившийся характер колебаний.

На Рис. 3(б) показано сравнение профиля волны при частоте 14770 Гц в момент времени $t = 0.004913$ с с цилиндрической функцией Бесселя нулевого порядка, приведенной к соответствующему масштабу. Расчет функции Бесселя проводился с помощью следующего интегрального представления [4]

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin t) dt.$$

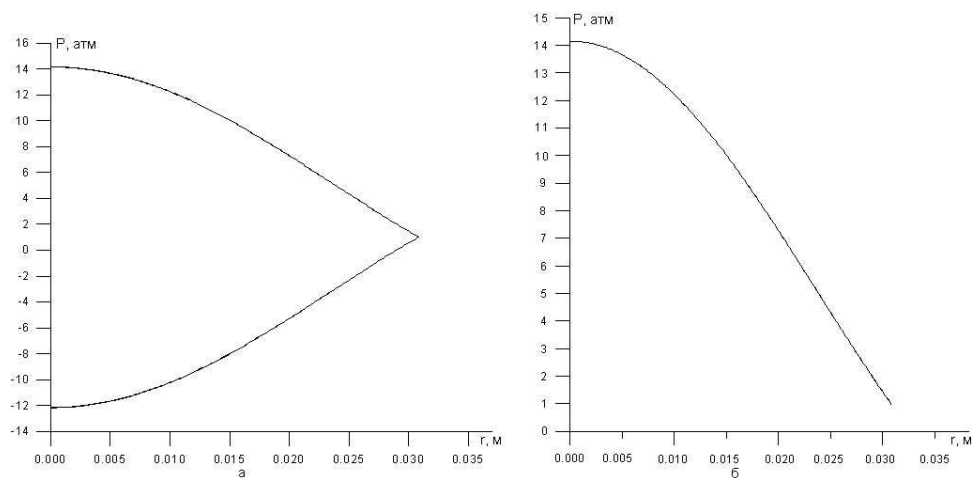


Рис. 3. а — Профили волны в различные моменты времени, б — Сравнение функции Бесселя нулевого порядка с профилем волны. Сплошная кривая — функция Бесселя совпадает с пунктирной — профилем волны

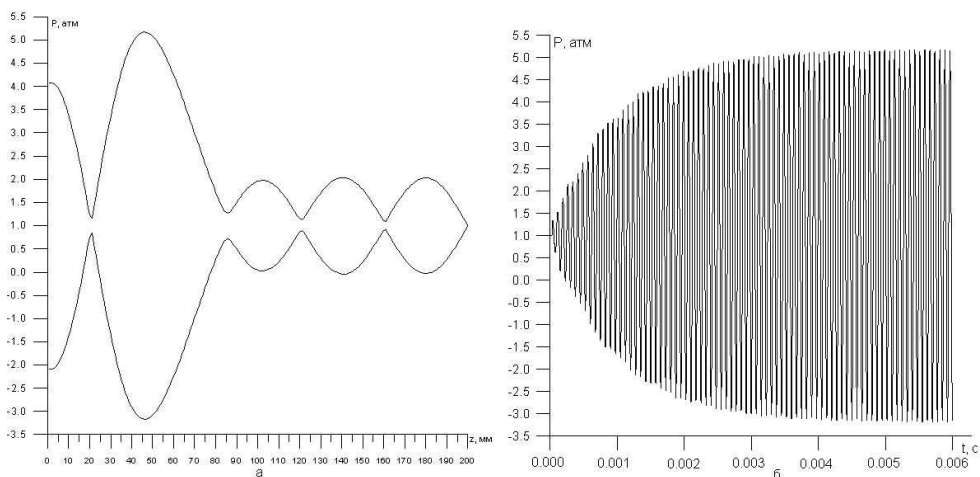


Рис. 4. а — Зависимость максимального и минимального давлений на центральной оси цилиндра от высоты, б — Зависимость давления от времени на центральной оси цилиндра в точке $z = 0.046$ м

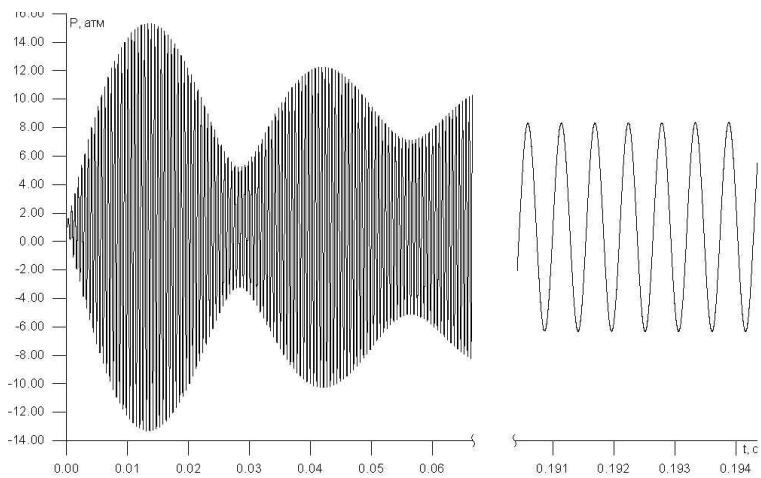


Рис. 5. Зависимость давления от времени на центральной оси цилиндра при задаваемой частоте 20500 Гц

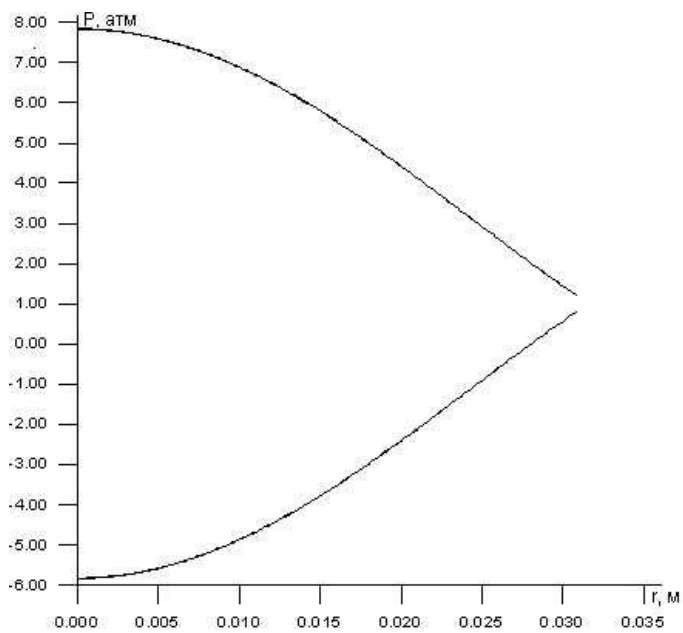


Рис. 6. Профили волны в различные моменты времени

Как видно из рисунка, графики полностью совпадают, что свидетельствует о получении стоячей акустической волны.

В двумерном случае давление задавалось в кольцевой области шириной 0.025 м. Нижний край области находился на высоте $z = 0.05$ м, верхний — $z = 0.075$ м. Были получены следующие данные.

На Рис. 4(а) представлено распределение по высоте максимального и минимального давлений на центральной оси сосуда за несколько периодов колебаний после установления стационарного режима. Как видно, максимальное увеличение амплитуды наблюдается в точке $z = 0.046$ м, находящейся ниже зоны пьезоэлектрического кольца.

На Рис. 4(б) показано изменение давления со временем на центральной оси цилиндра в точке $z = 0.046$ м. Из графика видно, что колебание давления как и в одномерном случае выходит на стационарный режим.

По явной схеме были сделаны расчеты для одномерного случая при различных частотах. Максимальное увеличение амплитуды колебаний наблюдалось на частоте 20500 Гц.

На Рис. 5 представлено изменение давления в жидкости на центральной оси в зависимости от времени. На Рис. 6 представлены профили волны в различные моменты времени. Так как соответствующие графики совпадают, можно сделать вывод о том, что колебания являются установившимися.

4 Заключение

В данной работе численным методом показана возможность формирования стоячих акустических волн в цилиндрическом сосуде.

Список литературы

- [1] Taleyarkhan R. P., West S. D., Cho J. S. et al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science 295, 2002. Pp. 1868-1873.
- [2] Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 34 с.
- [3] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990. 182 с.
- [4] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 219 с.