



УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ОБОЛОЧЕК И ПОЛОСТЕЙ

М. А. Ильгамов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, Казань

Аннотация. От мелочей быта до океанского лайнера и космической ракеты — всюду встречаются тонкостенные оболочки, отличающиеся легкостью и прочностью. Их применение настолько разнообразно, настолько не поддается перечислению, что смело можно сказать — мир состоит из оболочек, мир держится на оболочках. Ведь земная кора — это тоже оболочка. Широкое применение тонкостенных конструкций вызвало необходимость создания надежных методов расчета на прочность и устойчивость, что является предметом исследования сформировавшейся в прошлом веке новой ветви механики — теории оболочек. Важным оказывается их взаимодействие с рабочими средами. В данной статье обсуждаются проблемы устойчивости сферических тонкостенных оболочек и газовых полостей в жидкости.

Ключевые слова: статическая устойчивость, динамическая устойчивость, оболочка, газовая полость

В природе существует множество объектов сферической формы. Размеры их меняются от многих тысяч километров (Земля и другие планеты) до нанометров, то есть 10^{-6} мм (невидимые глазом пузырьки в жидкости, капли, живые клетки). Эти объекты либо чем-то заполнены, либо контактируют внешней поверхностью с какими-то средами. Форма сферы при минимальном весе материала, из которого она состоит, позволяет заключать в себе максимальный объем жидкости, газа и других сред, выдерживать большие внешний и внутренний перепады давления.

Этими свойствами продиктовано широкое применение сферических оболочек и в технике. Это резервуары для хранения нефти, газа, емкости

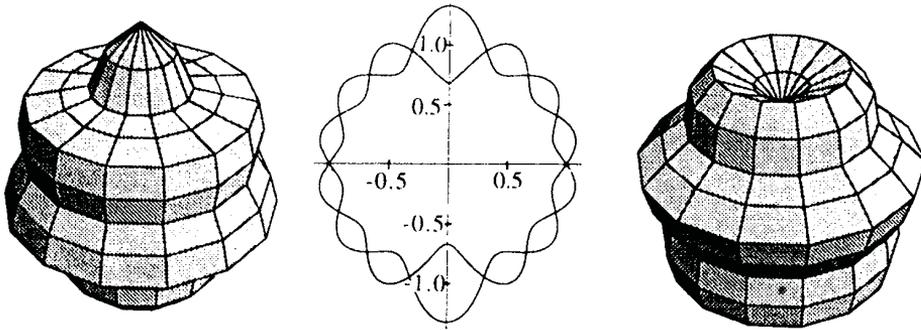


Рис. 1. Осесимметричные формы собственных колебаний и потери устойчивости тонкостенной сферической оболочки. Амплитуды волн увеличены. Изображена сферическая гармоника $i = 7$

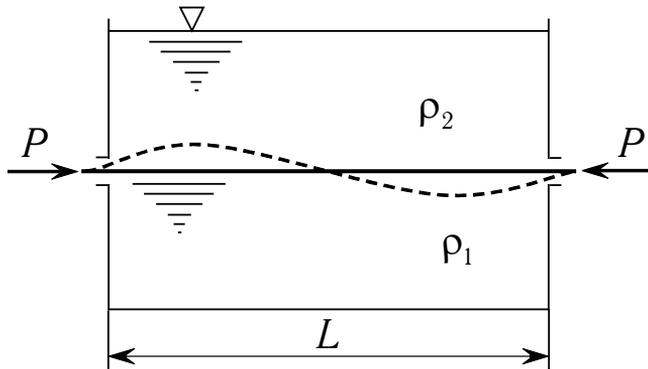


Рис. 2. Жидкости разных плотностей, разделенные плоской упругой пластиной

в химической промышленности, батискафы и другие подводные объекты, изделия аэрокосмической техники, мишени для экспериментов в ядерной физике и так далее. Отношение размеров наибольших объектов сферической формы в технике к наименьшим имеет порядок $10^5 \div 10^6$.

Если анализ напряженно-деформированного состояния сферической оболочки под внутренним перепадом давления не представляет больших трудностей, то при внешнем перепаде давления он не так прост. В последнем случае возникает проблема сохранения начальной формы оболочки. Одна из возможных форм волнообразования на поверхности сферической оболочки показана на Рис. 1.

Анализ устойчивости формы основывается на солидной научной базе — линейной и нелинейной теории тонкостенных оболочек [1–5]. Несмотря на огромные достижения в анализе устойчивости оболочек за последние де-

сятилетия, до сих пор остаются в нем белые пятна. Требуется дальнейшее изучение поведения систем, где применяются композитные материалы, наноматериалы, имеют место сложные виды нагружения, взаимодействие с рабочей средой. Многие вопросы динамического сжатия оболочек до сих пор не исследованы в достаточной мере.

Целью настоящей статьи является краткое изложение истории и современного состояния проблемы устойчивости сферических оболочек в разных областях их применения. Рассматривается также поведение сферических полостей в жидкости при их сильном сжатии.

1 Взаимодействие неустойчивости Эйлера и неустойчивости Рэлея-Тейлора

Это взаимодействие рассмотрим в самом простом примере плоской границы сред (двумерная статическая задача). Тонкая упругая пластинка длиной L и изгибной жесткостью D разделяет жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 и сжата силой P (Рис. 2). Предполагается, что жидкости несжимаемы, нижняя полость является замкнутой, реализуются условия скользящего шарнирного закрепления кромок пластины в стенках полости. При

$$P + g(\rho_2 - \rho_1)(L/2\pi)^2 \geq D(2\pi/L)^2 \quad (1)$$

происходит выпучивание пластины с образованием двух полуволн с узлом в ее середине (g — гравитационное ускорение). В этой формуле не учтен вес самой пластины. Если замкнутая полость простирается неограниченно или жидкость в ней является сжимаемой (например, в ней содержится достаточный объем пузырьков), то выпучивание происходит с образованием одной полуволны (в этом случае в (1) вместо L нужно подставить $2L$). Выпучивание сжатой пластины в отсутствие контакта с жидкостью или при $\rho_1 = \rho_2$ происходит в результате развития неустойчивости Эйлера. Соответствующее критическое значение силы равно $P = 4\pi^2 D/L^2$.

При $\rho_2 > \rho_1$ плоская поверхность контакта двух жидкостей является неустойчивой и в отсутствие разделяющей пластины ($D = 0$, $P = 0$). Это классическая неустойчивость Рэлея-Тейлора (при этом число волн может быть намного большим). Она проявляется, если ускорение направлено от менее плотной жидкости к более плотной. Потеря устойчивости пластины может происходить и при $P = 0$, если верхняя жидкость имеет бóльшую плотность, чем нижняя, и удовлетворяется условие

$$\rho_2 - \rho_1 \geq (D/g)(2\pi/L)^4. \quad (2)$$

Хотя форма выпучивания пластины одна и та же в обоих рассматриваемых случаях ($\rho_1 = \rho_2$, $P = 0$), природа неустойчивостей разная.

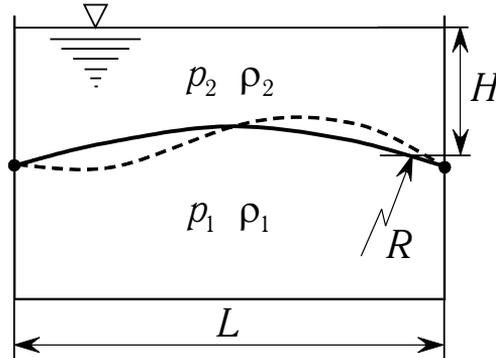


Рис. 3. Жидкости разных плотностей, разделенные цилиндрической упругой тонкостенной панелью

Неустойчивость Эйлера обусловлена возникающим изгибающим моментом от сжимающей силы при отклонении срединной поверхности пластины от ее начальной плоской формы. Поэтому при этом пластина испытывает напряжения сжатия и изгиба. Неустойчивость Рэля-Тейлора обусловлена изменением перепада давления верхней и нижней жидкостей при отклонении пластины от исходной формы. При этом пластина испытывает только напряжения изгиба.

Обоим видам неустойчивостей посвящена огромное количество литературы. Имеется также неустойчивость Рихтмайера-Мешкова контактной границы.

Как видно из рассмотренного простого примера, в гидроупругой системе могут иметь место оба вида неустойчивостей и их взаимодействие. При $\rho_2 > \rho_1$ (но при меньшей разности их, чем по (2)) снижается критическое значение сжимающей силы P . При $\rho_2 < \rho_1$ критическое значение P возрастает, происходит стабилизация плоской формы пластины. Наличие сжимающей силы P приводит к снижению разности плотностей, когда наступает рэлей-тейлоровская неустойчивость, растягивающая сила P стабилизирует эту неустойчивость.

Рассмотрим случай, когда жидкости разделяются упругим тонкостенным телом ненулевой кривизны (оболочкой, панелью). Тогда, в отличие от плоской границы контакта, любой перепад давления приводит к возникновению сжимающих или растягивающих сил в срединной поверхности оболочки, закрепленной по кромкам. Если обращенная выпуклостью вверх цилиндрическая панель (Рис. 3) является достаточно полой, то выпучивание также происходит по двум полуволнам (при условиях неподвижного шарнирного закрепления кромок к стенкам и выполнении неравенства $L^2/Rh > 9$, где R, h — радиус кривизны и толщина стенки). Сила, сжимающая панель, зависит от разности плотностей и равна $P \approx (\rho_2 - \rho_1) gHR$.

Условием выпучивания вместо (1) будет

$$HR + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \geq \frac{D}{g(\rho_2 - \rho_1)} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2, \quad (3)$$

откуда следует, что при $HR > (L/2\pi)^2$ преобладает неустойчивость Эйлера. Это условие в объектах техники почти всегда выполняется.

Предварительно натянутая пленка (изгибная жесткость $D = 0$, но в этом случае играет роль натяжение пленки, закрепленной по кромкам) или пленка большей длины, чем ширина емкости L , в зависимости от разности плотностей имеет разные равновесные положения [6, 7]. В этом примере реализуется выпучивание пленки по типу неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Вообще, анализ работы гидроупругих, аэроупругих систем гораздо более сложен, выявляет свойства, которые не характерны для отдельно взятых элементов системы [7]. Если принципиальные сложности, объем вычислительной работы, богатство получаемых результатов в задачах аэрогидромеханики оценить безразмерной мерой a , а в теории упругости — мерой b , то в задачах аэроупругости, гидроупругости эта мера имеет порядок $a + b + nab$ ($n > 1$), причем n иногда существенно больше единицы.

2 Неустойчивость тонких сферических оболочек. Линейная теория

По-видимому, первые исследования устойчивости тонких металлических оболочек под действием внешнего перепада давления были вызваны потребностями определения параметров конструкции глубоководных аппаратов. В реальных конструкциях (например, батискафах) имеются люки, нарушающие целостность оболочки, прикрепленные массивные элементы, опоры, подвески для крепления находящихся внутри узлов, которые приводят к местным утолщениям и нагрузкам, давление забортной воды меняется по высоте сферы. Однако глобальное напряженно-деформированное состояние глубоководного аппарата может быть определено в предположении целостной сферической оболочки со стенкой постоянной толщины под действием постоянного перепада давления.

Взаимодействие указанных выше видов неустойчивостей для конструкции глубоководных аппаратов мало и оно не учитывается. Здесь имеем дело с отмеченным выше случаем преимущественно эйлеровой неустойчивости. Исключение составляет случай, когда давление жидкости действует на выпуклую поверхность сферического сегмента (или цилиндрической панели) в условиях больших удельных весов за счет существенно больших ускорений, чем земное ускорение, а во внутренней полости находится среда с малой плотностью (например, в объектах аэрокосмической техники).

Исследование неустойчивости Эйлера тонкостенной изотропной металлической оболочки, впервые рассмотренной Р. Цолли [8] и Л. С. Лейбензоном [9], излагается во многих монографиях и справочных изданиях, например, в [4, 5]. Этими авторами исходя из линейной теории было получено следующее значение критического равномерного внешнего давления на сферическую оболочку

$$p = CE(h/R)^2, \quad C = 2/\sqrt{3(1-\nu^2)}. \quad (4)$$

Здесь E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки. При достижении перепадом давления значения (4) по всей оболочке образуются осесимметричные (кольцевые) волны (Рис. 1). Чем меньше относительная толщина стенки h/R , тем больше количество этих волн на поверхности.

В дальнейшем были изучены вопросы прочности и устойчивости с учетом пластических деформаций материала оболочки, сферических сегментов разной подъемности (строительные конструкции), оболочки из композитных материалов (объекты аэрокосмической техники), оболочки с упругим наполнителем (твердотопливный ракетный двигатель) и так далее. Композитные материалы, армированные волокнами или состоящие из слоев разнородных материалов, находят применение в связи с высокой удельной прочностью и жесткостью. К числу их достоинств относятся также высокая вязкость и демпфирующая способность, необходимые для конструкций, подвергающихся акустическим и импульсным нагрузкам.

Многочисленные экспериментальные исследования выпучивания сферических оболочек показали, что коэффициент $C = 1.21$ в формуле (4) в три раза выше опытных данных. Это в течение многих лет вызывало оживленную дискуссию среди специалистов.

Бич тонких оболочек, в том числе сферических, при их сжатии — это начальные отклонения от заданной формы, неровности толщины стенки, отклонения внешнего перепада давления от равномерности. В то время как при внутреннем перепаде давления эти факторы не играют заметной роли, более того начальные отклонения от формы стремятся уменьшиться по мере нагружения, при внешнем перепаде давления эти отклонения сильно влияют на устойчивость. Чем тоньше оболочка, тем больше их влияние. Например, при отклонении от сферичности, равном толщине стенки, критический перепад давления может быть меньше на $\sim 40\%$.

3 Нелинейная теория выпучивания тонких сферических оболочек

Стремление приблизить теорию к эксперименту, в частности, более строго учитывать влияние начальных отклонений от сферичности (до нагружения), дало толчок к развитию нелинейной теории выпучивания оболочек. Первое такое исследование выполнили Т. Карман и С. Цянь [10]. Рассматривая явление «хлопка» участка сферической оболочки, они ввели понятие верхней критической нагрузки и нижней критической нагрузки и указали, что действительное значение критической нагрузки находится между ними и зависит от способа нагружения. Эта работа сыграла в дальнейшем важную роль в развитии нелинейной теории устойчивости тонких оболочек разных очертаний.

Однако примененный ими метод решения задачи дал заниженное значение критического давления. Ошибка была исправлена в работе [11]. Полученное в ней решение дает значение коэффициента $C = 0.36$, что только на 22% превышает экспериментальный результат. Характерно весьма оживленное, временами драматическое обсуждение этой проблемы более полувека назад [12, 13]. Критическое значение (4) с коэффициентом $C = 0.36$ называют «формулой Муштари». Как отмечает специалист в области теории оболочек и строительной механики корабля академик В. В. Новожилов: «При оценке устойчивости сферических корпусов глубоководных аппаратов пользуются формулой Муштари, соглашаясь тем самым, что она должна быть признана наиболее достоверной» [14]. Здесь нужно назвать К. З. Галимова, В. И. Феодосьева, И. И. Воровича, А. В. Погорелова, внесших большой вклад в нелинейную теорию.

Было предложено определять устойчивость упругих оболочек с учетом способа нагружения и на основе статистических свойств внешних возмущений. При этом учитывается, например, что оболочки ведут себя по-разному при нагружении их «мертвой» нагрузкой и путем задания перемещений. Эта особенность видна из Рис. 4. Если характеристика прогиб w — давление p имеет вид, указанный сверху, то при постепенном нагружении прогиб плавно растет от точки O до точки A , затем происходит перескок к новой точке равновесия C . Этот перескок сопровождается звуковым эффектом и называется «хлопок». При уменьшении нагрузки изображающая точка из точки B переходит к точке E , происходит выхлоп. Если задается прогиб w , то весь процесс происходит плавно, изображающая точка не сходит с характеристики оболочки $OABC$. В реальных условиях эксплуатации оболочки может быть перескок из точки A в некоторую точку D . Важно отметить, что малые возмущения давления и прогиба, которые всегда присутствуют в условиях испытаний и эксплуатации, не наруша-

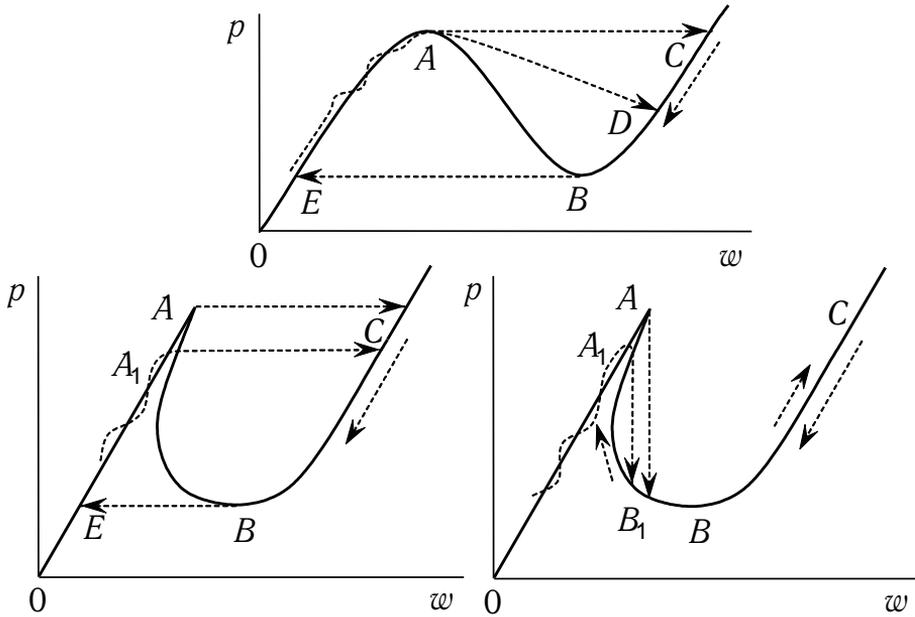


Рис. 4. Зависимость давление « p — упругое перемещение центральной точки сферической панели w »

ют описанную картину деформации, так как кривая $p(w)$ имеет плавный характер, и малые возмущения не приводят к сходу с нее изображающей точки.

В случае характеристики, изображенной внизу слева на Рис. 4, при задании давления p также может быть перескок из точки A к точке C , а при разгрузке — с точки B к точке E . Однако малые возмущения давления (например, подкачка рабочей жидкости) приводят к тому, что изображающая точка может раньше сорваться на другую ветвь (в точке A_1). В этом случае теоретическое значение верхней критической нагрузки не достигается. В тоже время при разгрузке характер выхлопа в нижней критической точке (перескок BE) остается без изменения.

Если задается перемещение (нижний правый рисунок), то перескок происходит из точки A к точке B_1 (испытательная машина вздрагивает). Малые возмущения приводят к тому, что верхняя критическая нагрузка не достигается, срыв на другую ветвь происходит в точке A_1 . Далее процесс является плавным.

Таким образом, важным оказался учет взаимодействия деформаций оболочки и поведения воздействующих на них сред. Трудно установить реальные условия нагружения в эксперименте и учитывать это в теории. Недостаточно выполнено исследований в этом направлении, а также с уче-

том таких особенностей взаимодействия элемента конструкции и рабочей среды, о чем говорилось в начале статьи.

Экспериментальные данные показывают, что теоретические результаты не охватывают всего диапазона различных форм выпучивания. Кроме того, для очень тонких оболочек, применяемых, например, в аэрокосмической технике, еще более возрастает влияние начальных отклонений от формы. При этом появляется некоторая зависимость коэффициента C в формуле (4) от относительной толщины h/R , хотя она не является сильной. Если для $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ориентировочно $C = 0.24$, то для $h/R = 10^{-3}$ можно принять $C = 0.16$.

Многие вопросы, относящиеся к устойчивости оболочек из разных материалов, особенно, композитных, и находящихся под воздействием нагрузок сложного поведения, требуют дальнейшего изучения.

4 Динамическая неустойчивость сферических оболочек

При проведении экспериментов с подводными взрывами М. А. Лаврентьев обратил внимание на побочный результат, связанный с деформацией дюралевой трубки, служившей державкой для заряда взрывчатого вещества. Оказалось что, чем ближе заряд к рассматриваемому участку трубки, тем больше волн деформации, а при достаточно большом удалении образуются две волны, как это предсказывается теорией устойчивости Эйлера в статической постановке. Исходя из этих данных, М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским [15] была разработана теория, согласно которой потеря устойчивости оболочки происходит с образованием волн, число которых зависит от того, насколько динамическое давление p превосходит значение статического критического давления p_e . А именно, это число пропорционально величине $\sqrt{p/p_e}$. Таким образом, число образующихся волн при динамическом давлении может быть намного больше, чем это значение для статического давления¹.

В дальнейшем, в динамической постановке была рассмотрена неустойчивость оболочек других очертаний, в том числе сферических. Особенно большое внимание было уделено анализу воздействия на оболочку волны давления в воздушной и водной средах.

Исследование взаимодействия акустических и ударных волн с жестким шаром изложены в книгах А. А. Харкевича [16], Б. В. Замышляева

¹ При ознакомлении с исследованиями динамической устойчивости упругих оболочек в Казанском физико-техническом институте АН СССР М. А. Лаврентьев привел для наглядности пример, как умелый сапожник забивает гвоздь сильным и коротким ударом во избежание развития эйлеровой неустойчивости и его выпучивания.

и Ю. С. Яковлева [17]. Ударные волны возникают в результате подводного взрыва. В дальнейшем во многих работах (например, [18]) изучались переходные процессы, возникающие в упругой тонкостенной оболочке в результате падения на нее плоской ударной волны.

Другой вид нагружения, часто встречающийся в технике, состоит из суммы постоянного давления и пульсирующего давления. В этом случае имеет место параметрический резонанс системы. Такое нагружение было изучено детально. Во многих работах (например, [19]) изучались также собственные и вынужденные колебания сферических оболочек, внутри которых находятся концентрический толстостенный упругий наполнитель (модуль заряда твердого ракетного топлива) и газовая полость.

Целью исследований устойчивости оболочек как при статическом, так и при динамическом воздействии является определение значений размеров оболочки, в частности, толщины оболочки при заданном материале и габаритах ее, которые обеспечивают сохранение сферической формы при очень малом уменьшении радиуса, сопровождающемся возникновением только напряжений сжатия.

Совершенно другой класс динамических задач возник в связи с атомной программой. Здесь задача заключается в обеспечении сильного и быстрого уменьшения радиуса при сохранении сферичности оболочки для эффективной кумуляции энергии [20]. Для специалистов, работавших в других областях науки и техники, эти исследования не были известны, что свидетельствует об эффективном обеспечении их закрытости. Можно сказать и об обратной известности. Однако эта изолированность не причинила обоим направлениям заметного вреда, так как решаемые задачи сильно различались (хотя конечной целью является обеспечение сферичности оболочки).

В оболочке, представляющей собой несущую конструкцию (например, подводный объект), имеет место равновесие внешней нагрузки, внутренних напряжений в материале, инерционных и диссипативных сил. При этом такая оболочка не может заметно уменьшаться в размере за счет увеличения толщины стенки, без образования вмятин и волн, последующего начала разрушения в местах наибольших напряжений.

При быстром обжатии оболочки, достигаемом в атомной технике, определяющими являются только внешние и инерционные силы. Применение пористого материала для изготовления оболочки также уменьшает в ней внутренние напряжения и повышает деформативность. Так приходят к модели оболочки из идеальной жидкости (в дальнейшем был сделан более строгий учет факторов, влияющих на деформацию). Таким образом, в балансе сил имеется значительное упрощение. Сложность заключается в многократном уменьшении радиуса оболочки (сильная геометрическая нелинейность). В таком приближении исключается из рассмотрения

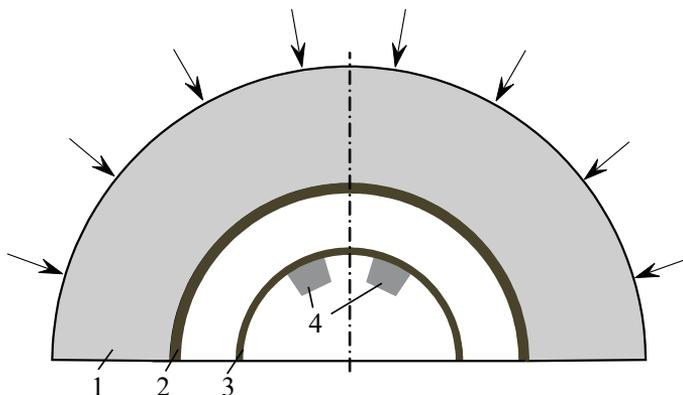


Рис. 5. Схема однокаскадной системы тонких концентрических полусферических оболочек и заряда ВВ. Обозначено: 1 — заряд ВВ, 2 — металлическая оболочка-ударник, 3 — экран, 4 — исследуемые образцы [20]

неустойчивость Эйлера, определяющей остается неустойчивость Релея–Тейлора при сжатии к центру сферической оболочки.

На Рис. 5 приведена схема эксперимента с полусферическими оболочками, предложенная Л. В. Альтшулером, Е. И. Забабахиним, Я. Б. Зельдовичем и К. К. Крупниковым в 1948 году [20]. Внешняя оболочка ускоряется под действием взрыва заряда ВВ до величины, превышающей первую космическую скорость (~ 8 км/с), и ударяет по исследуемой внутренней оболочке (экрану). При этом были достигнуты давления порядка нескольких мегабар (миллионов атмосфер). По усовершенствованным схемам, включающим, в частности, два каскада концентрических устройств, были достигнуты еще большие скорости. При этом давления были порядка ста и более мегабар вблизи центра кумулятивного сжатия сферической волны (в пористом железе и уране).

Очевидно, что при таких параметрах движения влияние внутренних напряжений в материале, из которого состоит оболочка, незначительно и модель идеальной сжимаемой жидкости для описания движения является неплохим приближением. Даже предположение о несжимаемости объема жидкости может быть приемлемым в качественном анализе, одновременно упрощая расчеты. Ранее такой подход позволил описать кумуляцию струи металла для пробивания броневой стали (М. А. Лаврентьев и другие). Я. Б. Зельдович писал, что они были поражены качественным соответствием результатов простых моделей с опытными данными в области атомной техники.

Вопросы устойчивости сферического сжатия жидкой оболочки были предметом многих исследований. На основе большого опыта работы

в области атомной техники Е. И. Забабахин высказал гипотезу: «Всякая неограниченная кумуляция неустойчива» [21, 22]. И далее: «Попытки доказать это пока не удались. Интересен был бы опровергающий пример, но и он пока не найден». Е. И. Забабахин считал, что теоретически возможная неограниченная кумуляция практически недостижима именно из-за неустойчивости этого процесса.

Довольно полный обзор исследований по неустойчивости Рэлея–Тейлора жидких сферических оболочек дан в [23]. Наиболее полно исследован случай схождения оболочки в отсутствии перепада давления при заданной начальной скорости (баллистический режим). Относящиеся сюда вопросы изложены также в [24]. Имеется большое количество исследований развитой неустойчивости границы раздела жидкостей (например, [25]).

В самое последнее время А. Н. Голубятников, С. И. Зоненко, Г. Г. Черный в работах [26–28] и других исследованиях развили теоретические и практические подходы по полезному использованию явления кумуляции с учетом прочностных свойств оболочек. В частности, установлено, что специально задаваемые начальные отклонения устраняют самопроизвольную неустойчивость с большой диссипацией энергии и повышают эффективность использования энергии взрыва. Определены критерии различного динамического поведения, в том числе неограниченного роста возмущений, указаны классы точных решений.

5 Неустойчивость сферической мишени при лазерном обжати

Возможность использования лазерного облучения для сильного сжатия мишени с ядерным топливом для его «зажигания» была предложена в 1964 г. Н. Г. Басовым и О. Н. Крохиным [29]. Позже появилась работа американских ученых на эту тему [30]. Обжатие происходит под реактивным давлением в результате испарения (абляции) внешней поверхности оболочки.

В схеме прямого облучения (Рис. 6) испарение поверхности оболочки происходит при непосредственном воздействии на нее лазерных пучков [31]. В непрямом способе воздействие на мишень производится лазерными пучками, вводимыми через отверстия сферической капсулы, в центре которой находится мишень. Начальный радиус пластиковой оболочки около 0.75 мм, толщина 0.03 мм, так что она относится к классу тонкостенных оболочек. Поэтому критическое значение статического давления определяется формулой (4). На внутреннюю поверхность наморожен слой дейтерий-тритиевого льда, который сжимается оболочкой при ее сферическом сжатии. Длительность лазерного облучения измеряется в нано-

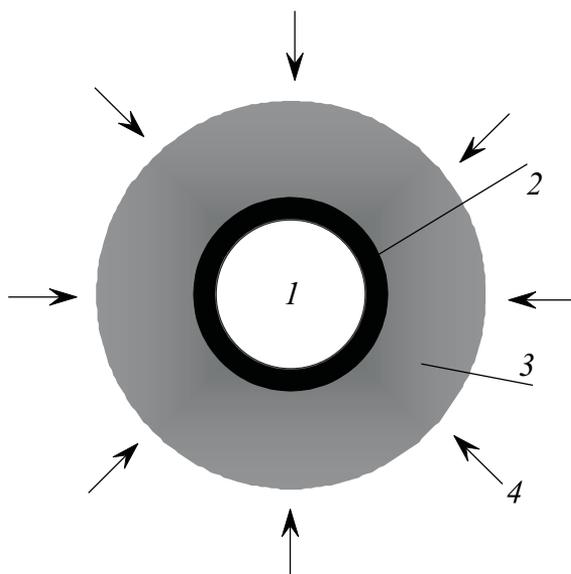


Рис. 6. Лазерная термоядерная мишень прямого облучения. Обозначено: 1 — сжатое дейтерий-тритиевое топливо, 2 — неиспаренная сферическая оболочка, 3 — плазменная корона, 4 — лазерные пучки [31]

секундах (10^{-9} с) и пикосекундах (10^{-12} с). Уже имеются фемтосекундные (10^{-15} с) лазеры. При этом важным является профилирование интенсивности лазерного облучения для обеспечения энергетически выгодного сжатия. Длительность импульса должна быть согласована с радиусом и массой оболочки так, чтобы его окончание приходилось на момент максимального сжатия мишени. По этой причине результаты выполненных теоретических исследований схождения оболочки в баллистическом режиме (при заданной начальной скорости) и без учета сжимающего давления здесь неприменимы.

Как и в объектах, о которых речь шла выше, здесь даже малые отклонения от сферичности и равномерности толщины стенки и давления на поверхность приводят к снижению эффектов кумуляции. Из Рис. 7, построенного по результатам численного моделирования, следует, что снижение энерговыделения, например, в 2 раза происходит при отношении амплитуды неравномерности облучения к среднему его уровню, равном 5%, а при больших значениях этой величины энерговыделение стремится к нулю.

В статье Р. И. Ильяева и С. Г. Гаранина [31] указывается, что наиболее неблагоприятны мелкомасштабные возмущения порядка толщины неиспаренной оболочки. Они приводят к перемешиванию материала оболочки и дейтерий-тритиевого слоя. И далее: «И хотя интенсивно ведутся экспе-

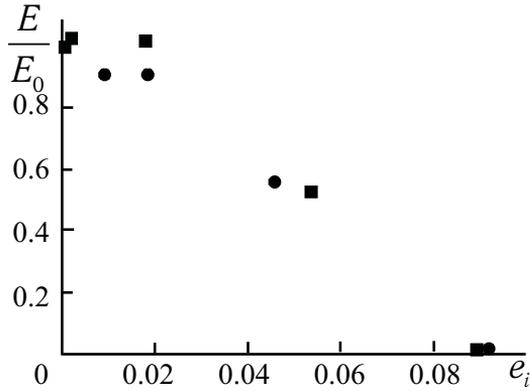


Рис. 7. Зависимость энергосвечения (E/E_0) в термоядерной мишени от амплитуды e_i отклонения интенсивности лазерного облучения от равномерного. Квадраты для гармоники $i = 2$, кружки — для $i = 5$ [31]

риментальные и теоретические исследования, пока нет ответа на вопрос, насколько следует повысить уровень лазерной энергии, чтобы решить проблему неустойчивостей» [31]. Даже недавно вышедшая книга [24] названа авторами «Гидродинамика перемешивания», где дается обзор исследований по устойчивости контактной границы сред. Имеется обзор также в работе [23] и в других публикациях. При рассмотрении мелкомасштабных возмущений границы фаз можно пренебречь ее кривизной. Тогда приходим к задаче о неустойчивости плоской границы контакта жидкостей.

Исходя из характерных времен процесса можно предположить, что в самом начале обжатия, когда деформация оболочки еще мала и находится на упругой и упруго-пластической стадии, развивается неустойчивость Эйлера. Как указывалось выше, по критерию Лаврентьева-Ишлинского число волн потери устойчивости при динамическом обжатии возрастает пропорционально $\sqrt{p/p_e}$, где p — действующее давление; p_e — критическое значение статического давления. Ясно, что это число в рассматриваемом случае велико по сравнению с единицей. Это волнообразование является «начальными отклонениями» для последующего процесса развития неустойчивости Рэля-Тейлора, когда в результате значительных деформаций и достигнутых к этому моменту скоростей схождения и ускорений материал оболочки можно рассматривать как жидкость. Между этими периодами двух видов неустойчивостей должен быть малый промежуток по сравнению со временем всего сжатия длиной в пикосекунду (10^{-12} с), где происходит их сильное взаимодействие и передача эстафеты возмущений.

Обсуждался ли подобный сценарий развития неустойчивости сферической оболочки при ее сжатии, автору данной статьи неизвестно. Рассмотрение неустойчивости Эйлера на ранней стадии обжатия дает возмож-

ность оценить начальное волнообразование и не считать его, как обычно, чисто случайным фактором. Это относится также к задачам, изложенным в предыдущем разделе.

6 Неустойчивость газовых и паровых полостей в жидкости

Размеры газовых и паровых полостей в жидкости изменяются в широких пределах — от порядка метра при подводных взрывах взрывчатого вещества до микро- и нанометров. К последним можно отнести кавитационные полости, возникающие в ультразвуковом поле, около обтекаемых жидкостью поверхностей (гребных винтов, лопаток и так далее). Вопросам поведения таких полостей, динамики пузырьковых жидкостей, кавитационного разрушения элементов конструкций, кавитационного шума, применения в химических технологиях, сонолюминесценции посвящено огромное количество литературы. Здесь мы коснемся только вопроса об устойчивости сферических полостей.

Интерес к вопросам устойчивости мелких пузырьков в жидкости возрос в последние годы в связи с интенсивным экспериментальным и теоретическим изучением сонолюминесценции и, особенно, достигнутыми высокими параметрами сверхсильного сжатия паровых пузырьков в дейтерированном ацетоне в работах Р. Талейархана, Р. И. Нигматулина, Р. Т. Лэхи с соавторами [32–34].

Предполагается, что свечение газовых пузырьков (или одиночного пузырька) в воде при воздействии ультразвуком обусловлено возникающей высокой температурой в крошечном объеме в их центре. Установлено, что длительность заключительной стадии схлопывания равна $\sim 10^{-3}$ части периода акустических колебаний, а промежуток высоких давлений и температур имеет порядок 10^{-6} части этого периода. При этом на многие порядки уменьшается объем пузырька по сравнению с объемом в начале сжатия. В примере, приведенном на Рис. 8, на стадии расширения радиус увеличивается почти в 40 раз, а при коллапсе уменьшается в 50 раз по сравнению с радиусом расширенного пузырька. Таким образом, при схлопывании пузырька имеет место весьма эффективная пространственно-временная концентрация энергии. В этом процессе важную роль играет стадия расширения пузырька в момент уменьшения давления в жидкости. На Рис. 8 показано расширение–сжатие пузырька при положительном и отрицательном импульсах давления, налагаемых на среднее давление p_0 . Положительный импульс p_a приводит к большему сжатию пузырька, чем сброс давления на ту же величину (при котором за некоторым расширением следует сжатие пузырька), если соблюдается условие $p_a < p_{cr}$, где $p_{cr} =$

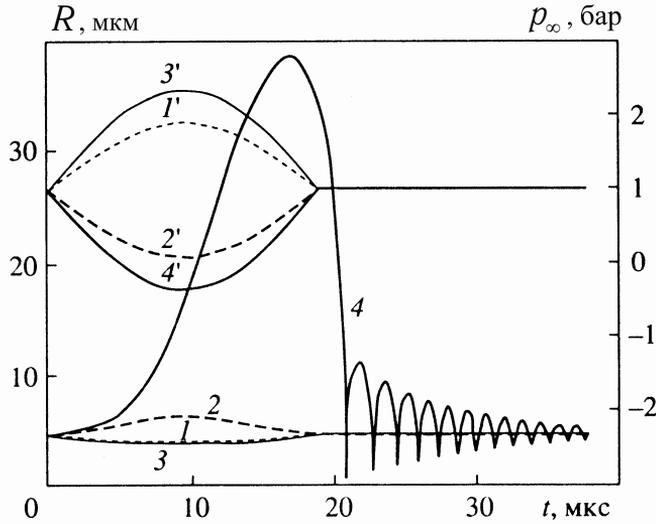


Рис. 8. Изменение радиуса пузырька по времени при начальном радиусе $R_0 = 4.5$ мкм, давлении $p_0 = 1$ бар. Суммарное давление $p_\infty = p_0 \pm p_a(t)$. Кривые 1–4 — радиусы пузырька (левая шкала), 1'–4' — заданные значения давления в жидкости (правая шкала) [33]

$p_0 + \sigma(3\gamma - 1)/3\gamma R_0$; R_0 — начальный равновесный радиус, σ , γ — коэффициенты поверхностного натяжения и адиабаты.

Сброс давления в жидкости на величину p_a с последующим его повышением до среднего уровня при соблюдении условия $p_a > p_{cr}$ приводит к сильному расширению пузырька. При этом его последующее инерционное сжатие и коллапс сопровождаются повышением давления, плотности и температуры до значений, соответственно в 10^4 , 10^3 , 10 раз превосходящих максимальные значения этих параметров, достигаемых в случае повышения давления в жидкости на ту же величину p_a . Эти оценки получаются в предположении равномерного по объему адиабатического сжатия газа. При учете сферических ударных волн они в центре пузырька становятся равными соответственно 10^8 , 10^6 , 10^2 [33].

В экспериментах с дейтерированным ацетоном [32–34] параметры концентрации энергии в кластере паровых пузырьков на несколько порядков выше, чем при люминесценции. Это обусловлено, в частности, на порядок большей амплитудой ультразвуковых колебаний и кластерным эффектом в этих экспериментах.

Из сказанного в предыдущих разделах статьи ясно, что высокие значения параметров при схлопывании пузырьков могут быть достигнуты при условии сферичности их сжатия. В эксперименте одиночный пузы-

рек, помещенный в жидкости вдали от стенки сосуда, светится, а по мере приближения к стенке постепенно перестает светиться. Это объясняется нарушением условий сферической симметрии вблизи стенки и развитием неустойчивости при схлопывании.

Линейная теория несферических колебаний и устойчивости пузырьков начала развиваться после работ М. С. Плессета [36, 37] и Г. Биркгоффа [38]. Обзор исследований дан во многих работах, например, в [39].

Самой простой задачей является случай схлопывания вакуумированной полости в идеальной несжимаемой жидкости. К этой модели близок случай парового пузырька. Такое вакуумирование реализуется также при расширении газового пузырька на фазе уменьшения ультразвукового давления в жидкости. В такой постановке уменьшение радиуса происходит по закону

$$R \approx R_m (1 - \tau^2)^{1/3} \quad (0 \leq \tau < 0.98), \quad (5)$$

$$R \approx (R_m/3) (1 - \tau)^{2/5} \quad (0 < \tau \leq 1),$$

где R_m — максимальный радиус; τ — безразмерное время, отнесенное к характерному времени процесса (во втором соотношении время снова отсчитывается с $\tau = 0$).

Бурное возрастание возмущений происходит на заключительной стадии схлопывания. Более показательным является отклонение a_i (i -ая сферическая гармоника), отнесенное к текущему радиусу $\varepsilon_i = a_i/R$. Амплитуда отклонений при движении границы в соответствии с соотношениями (5) определяется формулой [40]

$$\varepsilon_i \approx \varepsilon_{im} (1 - \tau)^{-1/2}, \quad (6)$$

где ε_{im} — начальное относительное отклонение от сферичности. Она может быть выражена также через текущий радиус

$$\varepsilon_i \approx \tilde{\varepsilon}_{im} (R_m/R)^{5/4}. \quad (7)$$

Таким образом, на стадии сжатия полости всегда происходит рост возмущений (на стадии расширения — их уменьшение). Формулы (6), (7) дают оценку неустойчивости полости сверху (с запасом). Они могут быть использованы для сопоставления времени существенного искажения сферической формы с возрастанием противодействия в полости, отхода от ее поверхности волны давления. Если волна в полости формируется раньше начала бурного искажения формы, то при достаточно малом начальном отклонении от сферичности происходит сферическая фокусировка ударной волны в центре.

При численном моделировании учитываются вязкость и сжимаемость жидкости, противодействие в полости, возникновение в газе сферических

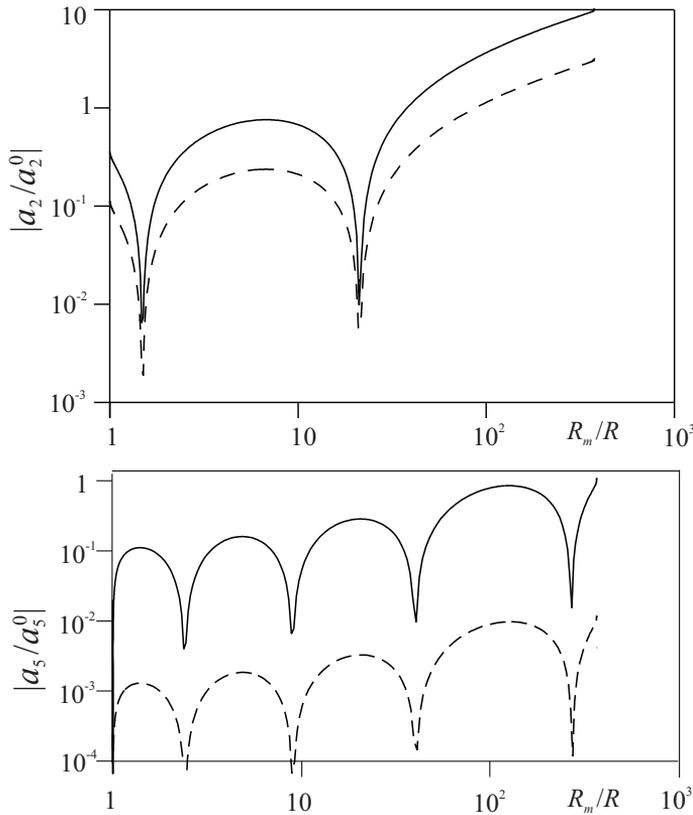


Рис. 9. Зависимость отклонений от сферической формы при сжатии полости давлением в жидкости $p_\infty = 4.5$ бар. Сплошные кривые получены без учета вязкости в жидкости, штриховые — с учетом вязкости [41]

ударных волн, теплопроводность жидкости и газа, испарение на стадии расширения, конденсация на стадии сжатия. Все эти факторы обеспечивают некоторое повышение устойчивости сферической формы [41, 42].

При миллиметровых и выше размерах полости, как в примерах из предыдущих разделов, влияние вязкости на развитие отклонений от сферичности незначительно. В этих случаях отклонения по всем гармоникам равновероятны. Все зависит от формы начального отклонения. Как отмечалось выше, в начале удара по оболочке могут образовываться мелко-масштабные волны, которые при дальнейшем движении возрастают по амплитуде. Может быть нелинейное взаимодействие разных гармоник. При схлопывании пузырьков микронных размеров роль вязкости возрастает.

На Рис. 9 даны значения отношения размерной амплитуды a_i к начальному отклонению a_i^0 для случаев эллипсоидальной формы отклонения от сферичности ($i = 2$) и для формы с $i = 5$ (последняя форма изображена

на Рис. 1) в зависимости от отношения R_m/R . Демпфирующее влияние вязкости с уменьшением длин волн возмущения возрастает как i^2 . Таким образом, с уменьшением размеров полостей и с увеличением вязкости жидкости высшие формы отклонений от сферичности становятся все более устойчивыми, наименее устойчивой является эллипсоидальная форма отклонений.

В действительности распределение параметров газа в полости не является равномерным, как это предполагается в подавляющем большинстве исследований по устойчивости. Поэтому возникает важный вопрос, как влияет эта неравномерность на динамику схлопывания, в том числе на устойчивость полости. В последних исследованиях [41, 42] применялись уравнения движения газовой динамики с законами состояния совершенного газа, уравнения Ван-дер-Ваальса, Мосса, Ми-Грюнайзена (также и для жидкости). Таким образом, учитывается и сжимаемость жидкости и ударные волны в газе. Несмотря на значительное различие чисто сферической динамики газа в полости по моделям с учетом и без учета теплопроводности жидкости и газа, влияние их на рост отклонений от сферичности оказывается незначительным. Осуществлен также учет сил поверхностного натяжения и нелинейных эффектов на устойчивость полости.

Отметим, что модель полости в неограниченной жидкости может быть применена для качественной оценки устойчивости внутренней поверхности жидкой оболочки при ее сжатии без абляции внешней поверхности, то есть с увеличивающейся толщиной по мере уменьшения радиуса. Такая модель особенно подходит для заключительной стадии схлопывания, когда происходит бурное возрастание отклонений от сферичности, а также для высоких гармоник.

Автор благодарен С. В. Хабирову просмотр статьи и предложения по ее улучшению.

Список литературы

- [1] Ляв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
- [2] Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 400 с.
- [3] Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
- [4] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 450 с.

- [5] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 томах. Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко, М: Изд-во Машиностроение, 1968. 568 с.
- [6] Петров В. М., Черноусько Ф. Л. О равновесии жидкости, ограниченной гибкой пленкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 131–142.
- [7] Pgamov M. A. Static problems of hydroelasticity. Moscow: Fizmatlit, 1998. 208 p.
- [8] Zoelly R. Uber ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Promotionsarbeit, Zurich. 1915.
- [9] Лейбензон Л. С. О приложении метода гармонических функций Томсона к вопросу устойчивости сжатых сферической и цилиндрической оболочек. Юрьев: Ученые записки Юрьевского ун-та. 1917. № 5. С. 1–47.
- [10] Karman Th. and Tsien Hsue-Shen. The buckling of spherical shells by external pressure // J. of the Aeron. Sci. 1939. V. 17, № 2.
- [11] Муштари Х. М., Суркин Р. Г. О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия тонкой сферической оболочки под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления // ПММ. 1950. Т. 14, Вып. 6. С. 573–586.
- [12] Феодосьев В. И. Об устойчивости сферической оболочки под действием внешнего равномерно распределенного давления // ПММ. 1954. Т. 18, Вып.1. С. 90–95.
- [13] Муштари Х. М. К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления // ПММ. 1955. Т. 19, Вып. 2. С. 251–254.
- [14] Новожилов В. В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. VI–VII. Казань: Изд-во КГУ. 1970. С. 3–22.
- [15] Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР, 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
- [16] Харкевич А. А. Неустановившиеся волновые движения. М.: Гостехиздат. 1950. 302 с.
- [17] Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Ленинград: Судостроение, 1967. 450 с.

- [18] Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Ленинград: Судостроение, 1970. 365 с.
- [19] Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
- [20] Альтшулер Л. В., Крупников К. К., Фортвов В. Е., Фунтиков А. И. Начало физики мегабарных давлений // Вестник РАН, 2004. Т. 74, № 11. С. 1011–1022.
- [21] Забабахин Е. Н., Забабахин И. Е. Явление неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 173 с.
- [22] Забабахин Е. Н., Забабахин И. Е. Кумуляция и неустойчивость. Снежинск: Изд. РФЯЦ-ВНИИТФ, 1998. 112 с.
- [23] Kull Н. J. Theory of the Rayleigh-Taylor instability // Physics Reports, 1991. 206. № 5. P.197–325.
- [24] Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сон Э. И. Гидродинамика перемешивания. М.: Изд-во МФТИ, 1999. 464 с.
- [25] Неуважаев В. Е., Паршуков И. Э. Изучение устойчивости раздела жидкостей при совместном действии импульсного и постоянного ускорений // Математическое моделирование. 1993 Т. 5, Вып. 2. С. 16–24.
- [26] Зоненко С. И., Черный Г. Г. Новый вид кумуляции энергии и импульса метаемых взрывом пластин и оболочек // ДАН, 2003. Т. 390, № 1. С. 46–45.
- [27] Голубятников А. Н., Зоненко С. И., Черный Г. Г. О кумулятивном эффекте при больших деформациях оболочки под действием одностороннего давления // ДАН, 2004. Т. 395, № 3. С. 348–352.
- [28] Голубятников А. Н., Зоненко С. И., Черный Г. Г. Новые модели и задачи теории кумуляции // Успехи механики, 2005. Т. 3, № 1. С. 31–93.
- [29] Басов Н. Г., Крохин О. Н. Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора // ЖЭТФ, 1964. Т. 46. С. 171–175.
- [30] Nuckols J. et al. Laser compression of matter to super high densities thermonuclear application // Nature, 1972. V. 239. P. 139–142.
- [31] Илькаев Р. И., Гаранин С. Г. Исследование проблем термоядерного синтеза на мощных лазерных установках // Вестник РАН, 2006. Т. 76, № 6. С. 503–513.

- [32] Taleyarkhan R. P., West C. D., Cho J. S., Lahey R. T., Nigmatulin R. I., Block R. C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*, 2002. V. 295. P. 1868–1873.
- [33] Nigmatulin R. I., Taleyarkhan R. P., Lahey R. T. The evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation revisited // *J. Power and Energy*, 2004. 218–A. P. 345–350.
- [34] Taleyarkhan R. P., West C. D., Lahey R. T., Nigmatulin R. I., Block R. C., Xu Y. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation. *Phys. Rev. Lett.*, 2006. 96, 034301.
- [35] Аганин А. А., Ильгамов М. А. Динамика газового пузырька при возбуждении импульсами сжатия и разрежения в жидкости // *ДАН*, 2002. Т. 382, № 2. С. 176–180.
- [36] Plesset M. S. The dynamics of cavitation bubbles // *J. Appl. Mechanics*, 1949. P. 277–282.
- [37] Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // *J. Quart. Appl. Mechanics*, 1956. V. 13. P. 419–430.
- [38] Birkhoff G. Stability of spherical bubbles // *J. Quart. Appl. Mechanics*, 1956. V. 13. P. 451–453.
- [39] Аганин А. А., Ильгамов М. А. Динамика пузырька газа в вязкой жидкости с немалыми искажениями сферической формы // *Динамика газовых пузырьков и аэрозолей*. Казань: КГУ, 2003. С. 17–22.
- [40] Ильгамов М. А. Качественный анализ развития отклонений от сферической формы при схлопывании полости в жидкости // *ДАН*, 2005. Т. 404, № 1. С. 37–40.
- [41] Аганин А. А., Гусева Т. С. Эволюция малого искажения сферической формы газового пузырька при его сильном расширении-сжатии // *ПМТФ*, 2005. Т. 46, № 4. С. 17–28.
- [42] Нигматулин Р. И., Аганин А. А., Ильгамов М. А., Топорков Д. Ю. Искажение сферичности парового пузырька в дейтерированном ацетоне // *ДАН*, 2006. Т. 408, № 6. С. 767–771.