



ВЛИЯНИЕ УГЛА НАКЛОНА ПОЛОСТИ НА ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ АНОМАЛЬНО ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. В. Моисеев

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В работе численно моделируется двумерная свободная конвекция жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры в квадрате при различных углах наклона к горизонту. Вычисляются интегральные коэффициенты теплообмена на изотермических границах и минимальные критические числа Рэлея.

Ключевые слова: численное моделирование, термовязкая жидкость, теплообмен, критическое число Рэлея, конвекция

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о свободной конвекции ньютоновской термовязкой жидкости в замкнутой квадратной области $D = [0; L] \times [0; L]$. Квадрат наклонен к горизонту под углом α (Рис. 1). Будем полагать, что подогревается «нижняя» граница квадрата, а «верхняя» охлаждается, «боковые» границы квадрата будем считать адиабатическими.

Естественная конвекция термовязкой жидкости в двумерной области описывается следующей безразмерной системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}(T) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + GrT \sin \alpha;$$

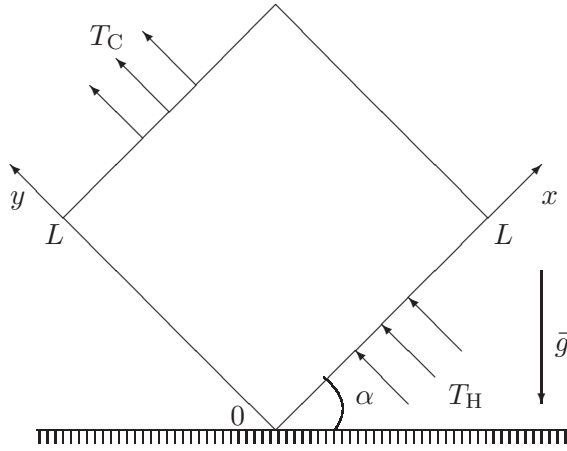


Рис. 1: Схема квадратной полости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}(T) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}(T) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \text{Gr}T \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

где u, v — безразмерные продольная и поперечная составляющие скорости; p — давление и T — температура; x, y — безразмерные пространственные координаты и t — безразмерное время. Безразмерные параметры $\text{Gr} = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$ и $\text{Pr} = \frac{\mu c}{k}$ — числа Грасгофа и Прандтля, $\bar{\mu}(T) = \frac{\mu(T)}{\mu_0}$ — безразмерная динамическая вязкость. В безразмерных параметрах L — характерный размер области; $\Delta T = (T_H - T_C)$ — размерный перепад температур между «нижней» и «верхней» границами полости; g — ускорение силы тяжести; μ_0, ν, c, k — постоянные динамическая и кинематическая вязкости, теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости; β — коэффициент теплового расширения; α — угол наклона полости к горизонту.

Параметры задачи приняты такими же, как и в работе [2], где рассматривалась конвекция жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры без учета поворота полости относительно горизонта. Число Прандтля полагается равным $\text{Pr} = 118$, что соответствует жидкости с квадратичной зависимостью вязкости. Безразмерная вязкость определяется квадратичной зависимостью $\bar{\mu}(T) = 36T^2 + 1$, где учтено, что максимальная вязкость достигается при абсолютных температурах T_H и T_C

и в 10 раз превосходит значение вязкости в вершине параболы, где при средней температуре $T_0 = \frac{(T_H + T_C)}{2}$ достигается минимальная вязкость жидкости.

В рассматриваемой постановке граничные условия будут иметь вид: на адиабатических границах при $x = 0$ и $x = 1$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

на нижней границе при $y = 0$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad T = 0,5;$$

на верхней границе при $y = 1$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad T = -0,5.$$

В качестве начальных условий примем состояние равновесия жидкости:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad p = 0, \quad T = 0.$$

2 Численный метод и тесты

Для численного решения задачи применялся метод контрольного объема с использованием алгоритма «SIMPLE», подробно описанный в [3]. В качестве тестовых задач рассматривались задачи о свободной конвекции жидкости в полости с постоянной вязкостью и с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. Система уравнений, граничные и начальные условия для задачи с постоянной вязкостью остаются такими же, как и в задаче с квадратичной зависимостью вязкости, а безразмерная вязкость полагается равной единице ($\bar{\mu}(T) = 1$).

При установившихся режимах конвекции тепловые потоки в силу уравнения притока тепла на изотермических стенках должны быть равны. Течение считается установившимся, если отличие тепловых потоков составляет менее 0,1%, То есть требуется выполнение условия:

$$\Delta \text{Nu} = \left| \frac{\text{Nu}_H - \text{Nu}_C}{\text{Nu}_0} \right| < 10^{-3},$$

где Nu_H , Nu_C — числа Нуссельта на «горячей» ($y = 0$) и «холодной» ($y = 1$) границах соответственно:

$$\text{Nu}_H = - \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad \text{Nu}_C = - \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1} dx;$$

Таблица 1. Сходимость чисел Нуссельта на изотермических стенках для постоянной вязкости

Количество узлов	Средние числа Нуссельта	Относительная погрешность (%)
(10 × 10)	2,0403	— — —
(20 × 20)	1,9691	3,489
(40 × 40)	1,9503	0,954
(80 × 80)	1,9456	0,240

Таблица 2. Сходимость чисел Нуссельта на изотермических стенках для квадратичной зависимости вязкости

Количество узлов	Средние числа Нуссельта	Относительная погрешность (%)
(10 × 10)	4,64	— — —
(20 × 20)	4,35	6,25
(40 × 40)	4,55	4,59
(80 × 80)	4,73	3,95

Nu_0 — число Нуссельта на подогреваемой границе в начальный момент времени.

Тестовые расчеты для постоянной вязкости производились в случае стационарного режима при $Pr = 7$ и $Gr = 1000$ — Табл. 1, а для квадратичной зависимости вязкости в случае хаотических режимов при $Pr = 118$ и $Gr = 12000$ — Табл. 2. Безразмерный временной шаг полагался равным $\Delta t = 10^{-4}$, числа Нуссельта осреднялись по достаточно большому промежутку времени:

$$Nu = \frac{1}{(t_{\text{end}} - t_0)} \int_{t_0}^{t_{\text{end}}} Nu(t) dt.$$

Относительная погрешность определялась формулой:

$$\Delta_{rel} = \left| \frac{Nu_n - Nu_{2n}}{Nu_n} \right|.$$

Видно что, как в случае стационарной конвекции с постоянной вязкостью, так и в случае хаотической конвекции с квадратичной зависимостью, теплообмен для сеток 40×40 и 80×80 практически мало отличается. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что метод контрольного

объема и алгоритм «SIMPLE» при выбранном шаге интегрирования дают вполне удовлетворительные результаты.

3 Результаты моделирования

Все расчеты производились при фиксированном числе $Pr = 118$ на равномерной сетке 50×50 узлов. Уравнения конвекции интегрировались с постоянным безразмерным временным шагом $\Delta t = 10^{-4}$. Числа Грасгофа варьировались в диапазоне $1 \leq Gr \leq 40000$, а угол наклона полости α в интервале $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ с шагом в 15 градусов.

В работе [2] для угла наклона $\alpha = 0^\circ$ установлены области стационарных, квазипериодических и хаотических режимов конвекции. Показано, что возможны три стационарных режима конвекции (одновихревой, симметричный двухвихревой и асимметричный двухвихревой), периодические, квазипериодические и хаотические режимы.

В отличие от конвекции, рассмотренной в работе [2], при угле наклона полости $\alpha = 15^\circ$ было обнаружено два типа стационарных одновихревых течений. Первый тип реализуется в диапазоне чисел Рэлея $Ra = Pr \cdot Gr$ при числах Рэлея в интервале $1180 \leq Ra \leq 271400$, а второй тип — в диапазоне $283200 \leq Ra \leq 1534000$ и отличается от первого наличием вложенных малых вихрей, симметрично расположенных относительно оси симметрии полости. При числах Рэлея $1652000 \leq Ra \leq 2950000$ обнаружен колебательный режим конвекции, характеризующийся противофазными колебаниями, а в интервале $2950000 < Ra \leq 4720000$ реализуются синфазные колебания чисел Нуссельта на изотермических стенках.

При $30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ обнаружены только стационарные одновихревые колебания двух типов. Бифуркация происходит в окрестности числа $Ra = 236000$, после чего одновихревое течение трансформируется в одновихревое с вложенными малыми вихрями.

На Рис. 2 показаны интегральные числа Нуссельта на подогреваемой границе в зависимости от числа Рэлея для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости при различных углах наклона полости. Видно, что с увеличением угла α при фиксированном числе Ra теплообмен улучшается. Однако, при $\alpha = 90^\circ$ (сплошная тонкая линия) теплообмен становится хуже, чем для углов 60° и 75° .

Интегральные числа Нуссельта на «горячей» стенке в зависимости от числа Рэлея для жидкости с постоянной вязкостью приведены на Рис. 3. Очевидно, что при увеличении угла α наблюдается аналогичная картина, но для всех углов наклона теплообмен становится выше, чем для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости.

На Рис. 4 представлена зависимость минимального критического числа

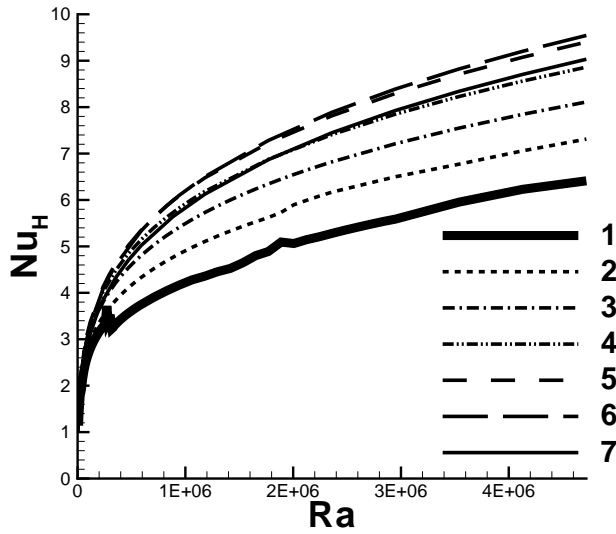


Рис. 2. Карта режимов теплообмена для квадратичной зависимости вязкости: 1 — $\alpha = 0^\circ$, 2 — $\alpha = 15^\circ$, 3 — $\alpha = 30^\circ$, 4 — $\alpha = 45^\circ$, 5 — $\alpha = 60^\circ$, 6 — $\alpha = 75^\circ$, 7 — $\alpha = 90^\circ$

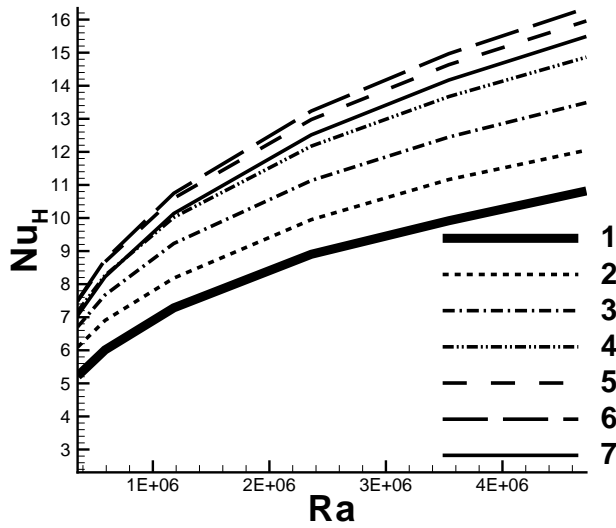


Рис. 3. Карта режимов теплообмена для постоянной вязкости: 1 — $\alpha = 0^\circ$, 2 — $\alpha = 15^\circ$, 3 — $\alpha = 30^\circ$, 4 — $\alpha = 45^\circ$, 5 — $\alpha = 60^\circ$, 6 — $\alpha = 75^\circ$, 7 — $\alpha = 90^\circ$

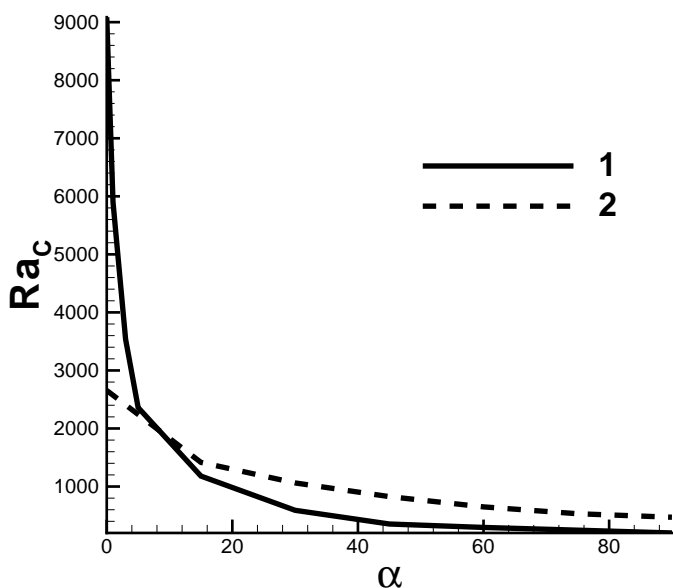


Рис. 4. Зависимость критического числа Рэлея от угла наклона полости: 1 — жидкость с квадратичной зависимостью вязкости, 2 — жидкость с постоянной вязкостью

Рэлея Ra_c от угла α для обеих жидкостей. Видно, что с увеличением угла наклона, минимальное критическое число Рэлея уменьшается, как для жидкости с постоянной вязкостью, так и для жидкости с квадратичной зависимостью вязкости, но для последней жидкости падение числа Ra_c более ярко выражено.

4 Заключение

Установлены области различных режимов конвекции при различных углах наклона полости для жидкостей с постоянной вязкостью и с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. Построены карты режимов теплообмена. Показано, что квадратичная зависимость вязкости ухудшает теплообмен на изотермических границах для всех α . Обнаружено что, как для термовязкой жидкости, так и для жидкости с постоянной вязкостью с увеличением угла наклона теплообмен улучшается. Однако, при $\alpha = 90^\circ$ теплообмен становится хуже, чем для углов наклона полости, находящихся в интервале $60 \leq \alpha \leq 75$. Показано, что с ростом угла наклона полости

минимальные критические числа Рэлея убывают.

Список литературы

- [1] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
- [2] Ильясов А. М., Моисеев К. В., Урманчиев С. Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII. № 4 (24). С. 51-59.
- [3] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.