



УСТАНОВИВШИЕСЯ ВИНТОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА¹

С. В. Хабиров

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Замечен ряд свойств инвариантной подмодели установившегося винтового движения газа. Проведена групповая классификация. Рассмотрены инвариантные и некоторые дифференциально инвариантные решения. Выведено условие существования решения без особенности.

Ключевые слова: газовая динамика, инвариантная подмодель

1. Уравнения газовой динамики, допускают двумерную подалгебру $H = \{\partial_t, \partial_x + \partial_\theta\}$ [1]. В цилиндрической системе координат $C(t, x, r, \theta, U, V, W)$, H — инвариантное решение представляется в виде: $U = u + r^{-1}w$, $V = v$, $W = w$, функции u , v , w , ρ , p зависят от инвариантов из независимых переменных $r, s = x - \theta$.

Уравнения подмодели таковы

$$\begin{aligned}uu_s + vu_r + \rho^{-1}p_s(1 + r^{-2}) &= 2r^{-2}vw, \\uv_s + vv_r + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}w^2, \\uw_s + vw_r - r^{-1}\rho^{-1}p_s &= -r^{-1}vw, \\(ru\rho)_s + (rv\rho)_r &= 0, \\uS_s + vS_r &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; u , v , w — инвариантные (i -) скорости, p — давление, ρ — плотность, S — энтропия.

Проведена групповая классификация [2] системы (1) по произвольному элементу f (см. таблицу расширений). Она отличается от групповой классификации для общих уравнений газодинамики тем, что увеличивает множество уравнений состояния, при которых происходит расширение допускаемой алгебры Ли.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 02-01-00550, 02-01-97911)

Ядро допускаемых алгебр — $\{\partial_s\}$ совпадает с фактором нормализатора алгебры H во всей алгебре Ли L_{11} , допускаемой уравнениями газовой динамики [1]. В таблице расширений приняты обозначения: φ, ψ, ω — произвольные функции; Θ — функция энтропии, таблица 1 из [1]; $Y = u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w - 2\rho\partial_\rho$, $Z_{\varphi(p)} = \rho\varphi'(p)\partial_p + \varphi(p)\partial_p$.

Таблица расширений

№ табл. 1	f	Расширяющиеся операторы
2, 3, 5, 6	$\psi(\Theta)\varphi(\Theta\rho)$	$2Z_p + \left(1 + \psi(\Theta\psi')^{-1}\right)Y$
8, 9	$\varphi(\Theta\rho) + \psi(\Theta)$	$2Z_1 + (\Theta\psi')^{-1}Y$
10, 11	$\Theta\rho^\gamma + \psi(\Theta)$	$2Z_p + \left(1 - \gamma^{-1} + \psi(\gamma\Theta\psi')^{-1}\right)Y,$ $2Z_1 + (\gamma\Theta\psi')^{-1}Y$
4	$\varphi(\Theta\rho)$	$\omega(S)Y$
6	$\Theta\rho^\gamma$	$Z_p, \omega(S)Y$
12	$\ln\rho + \Theta$	$Z_p, \omega(S)Y$
13	Θ	$Z_{\varphi(p)}, Y$

Для инвариантной подмодели (1) вводятся величины и определения, аналогичные величинам и определениям двумерных стационарных течений: i — линия тока $L \frac{ds}{u} = \frac{dr}{v}$; i — функция тока $\psi_s = -r\rho v$, $\psi_r = r\rho u$; i — расход между двумя i -линиями тока $Q(L_1, L_2) = \int_l r\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dl = \psi(L_2) - \psi(L_1)$, где $\vec{u} = (u, v)$, l — кривая, пересекающая i -линии тока, $\vec{n}$ — нормаль к кривой l ; i — интеграл энтропии $S = S(\psi)$; i — интеграл Бернулли $v^2 + r^2(1+r^2)^{-1}u^2 + I(c^2) = a(\psi) + r^2(1+r^2)^{-1}b^2(\psi)$, $I = 2 \int \rho^{-1} dp$, $c^2 = f_\rho$; i — интеграл скоростей $u + (r+r^{-1})w = b(\psi)$; i — критическая скорость на i -линии тока $c_*(r, a, b)$, $c_*^2 + I(c_*^2) = a + r^2(1+r^2)^{-1}b^2$; i — характеристики $C_0 : u\xi_s + v\xi_r = 0$, $C_\pm : \xi_s(u^2 - (1+r^{-2})c^2) = \xi_r[-uv \pm cr^{-1}(1+r^2)^{\frac{1}{2}}(\omega^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}]$, где $\omega^2 = v^2 + r^2(1+r^2)^{-1}u^2$.

Действительные i -характеристики $C_\pm$ возможны в области течения, определенной неравенством $\omega^2 > c^2$. Эту область гиперболичности можно установить по i -линиям тока сравнивая ω с i -критической скоростью c_* . Действительно, для нормального газа [3] справедливы неравенства

$$\omega^2 + I(\omega^2) > \omega^2 + I(c^2) = a + r^2(1+r^2)^{-1}b^2 = c_*^2 + I(c_*^2) > c^2 + I(c^2).$$

Отсюда следуют неравенства $\omega^2 > c_*^2 > c^2$.

Система уравнений подмодели (1) сводится к одному квазилинейному уравнению для i -функции тока

$$\begin{aligned} & \left(c^2 - \rho^{-2} (1 + r^2)^{-1} \psi_r^2 \right) \psi_{ss} + 2\rho^{-2} (1 + r^2)^{-1} \psi_s \psi_r \psi_{sr} + \\ & + r^2 (1 + r^2)^{-1} (c^2 - r^{-2} \rho^{-2} \psi_s^2) \psi_{rr} = \\ & = f_s S' \rho r^2 \left(f_\rho - r^{-2} \rho^{-2} \psi_s^2 - \rho^{-2} (1 + r^2)^{-1} \psi_r^2 \right) + \\ & + f_\rho \left[\rho^2 r^2 \left(\frac{1}{2} b' + r^2 (1 + r^2)^{-1} a a' \right) + r^{-1} (1 + r^2)^{-2} (2r \rho a + \psi_r (r^2 - 1)) \right] - \\ & - r^2 \rho^{-1} (1 + r^2)^{-2} (a - r^{-1} \rho^{-1} \psi_r) (2r^{-2} \psi_s^2 + (1 + r^2)^{-1} \psi_r^2 - r (1 + r^2)^{-1} \rho a \psi_r), \\ & r^{-2} \psi_s^2 + (1 + r^2)^{-1} \psi_r^2 + 2\rho^2 \int \rho^{-1} f_\rho d\rho = \rho^2 (b + r^2 (1 + r^2)^{-1} a^2). \end{aligned}$$

Инвариантная поверхность $h(r, s) = 0$ имеет нормаль

$$\vec{n} = (h_s^2 (1 + r^{-2}) + h_r^2)^{-\frac{1}{2}} (h_s, h_r, -r^{-1} h_s)$$

и скорость в направлении нормали $D_n = 0$. Скорость записывается через инварианты $\vec{u}_c = (u + r^{-1}w, v, w)$ и имеет нормальную составляющую $u_n = (u h_s + v h_r) (h_s^2 (1 + r^{-2}) + h_r^2)^{-\frac{1}{2}}$, что совпадает с относительной скоростью частиц. Проекция скорости на касательную плоскость такова $\vec{u}_\sigma = \vec{u}_c - u_n \vec{n}$.

Условия на поверхности сильного разрыва [3] записываются через инварианты.

Контактный разрыв:

$$[p] = 0, \quad u_i h_s + v_i h_r = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Ударная волна:

$$u_{n1}^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p] [\rho]^{-1}, \quad u_{n2}^2 = \rho_1 \rho_2^{-1} [p] [\rho]^{-1}, \quad (3)$$

$H(\rho_2, p_2; \rho_1, p_1) = 0$ — условие Гюгонио, $[\vec{u}_\sigma] = 0$.

Из последнего векторного равенства следует уравнение для определения инвариантной поверхности и равенство между скачками скоростей:

$$\begin{aligned} h_s [v] + r h_r [w] &= 0, \\ [u_n]^2 &= [v]^2 + [u]^2 r^2 (1 + r^2)^{-1}, \\ r [u] + (r^2 + 1) [w] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Справедливы утверждения из теории установившихся течений.

Предложение 1. Фронт ударной волны определяется по состоянию перед фронтом, удовлетворяющему условию гиперболичности $\omega^2 > c^2$, если за фронтом задать один из параметров.

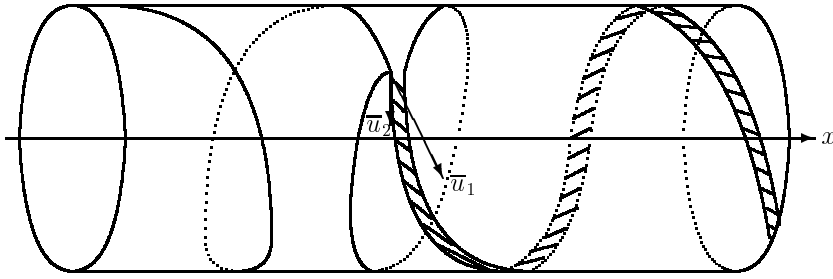


Рис. 1. Угол наклона скорости увеличивается при переходе через скачок

Предложение 2. В i -интегралах функции $a(\psi)$, $b(\psi)$ сохраняют свои значения при переходе через скачок: $[a] = [b] = 0$.

Определяется i -прямой скачок, как поверхность ударной волны перпендикулярная i -линиям тока, т.е. $u_i^{-1}h_s = v_i^{-1}h_r$. Из соотношений (3) следует, $h_r = 0$, $v_i = 0$. Значит, i -прямой скачок задается уравнением $h = s = \text{const}$ (винтовая поверхность в физических переменных), и он возможен лишь в отсутствии радиальных перемещений.

Вместо (3) уравнения i -прямого скачка таковы:

$$[u_n] = r(1 + r^2)^{-\frac{1}{2}}[u] = -(1 + r^2)^{\frac{1}{2}}[w].$$

2. Инвариантное ∂_s — решение удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} r^2 v u_r &= 2vw, \quad vv_r + \rho^{-1}p_r = r^{-1}w^2, \quad v(rw)_r = 0, \\ (rv\rho)_r &= 0, \quad vS_r = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{aligned}$$

При $v = 0$, $w \neq 0$ получается решение с произвольными функциями u , w , p ,

$$\rho = rw^{-2}p_r. \quad (5)$$

Получается неизэнтропическое стратифицированное течение, в котором частицы двигаются по винтовым линиям на цилиндре.

Два таких течения можно соединить i -прямым скачком, поместив в течение стенку. Возможны два случая.

Первый случай (Рис. 1): в физических переменных увеличивается угол наклона скорости к оси течения при переходе через скачок. След течения на цилиндре $r = \text{const}$ задается винтовыми линиями тока до скачка и после скачка, винтовой линией скачка, которая ограничена линией тока до скачка, идущей по стенке; винтовой полосой стенки, образованной линиями тока после скачка.

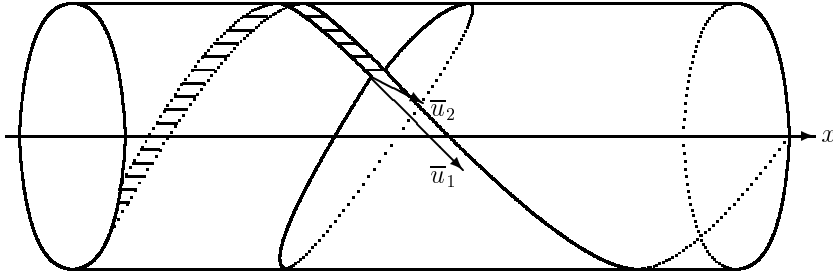


Рис. 2. Угол наклона скорости уменьшается при переходе через скачок

Второй случай (Рис. 2): в физических переменных уменьшается угол скорости с осью течения при переходе через скачок. След течения на цилиндре $r = \text{const}$ задается винтовыми линиями после скачка, винтовой линией скачка, ограниченной линией тока после скачка, идущей по стенке, винтовой полосой стенки, образованной линиями тока до скачка.

При $v \neq 0$ имеется 5 интегралов:

$$\begin{aligned} rv\rho = B, \quad rw = C, \quad u = D - Cr^{-2}, \quad S = S_0, \quad p = f(\rho, S_0), \\ B^2 r^{-2} \rho^{-2} + 2 \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{-1} f_{\rho} d\rho + C^2 r^{-2} = E^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где S_0, B, C, D, E — постоянные.

Получается изэнтропическое течение из неточечного источника ($r \geq r_0$) с закруткой. Имеется два типа таких течений для нормального газа. Первая ветвь $\rho = \rho_1(r)$, $\rho_1 > \rho > \rho(r_0) = \rho_0$, монотонно возрастает, радиальная скорость дозвуковая. Вторая ветвь $\rho = \rho_2(r)$, $0 < \rho < \rho_0$, монотонно убывает, радиальная скорость сверхзвуковая. Линии тока этих течений являются спиралями на поверхности вращения:

$$x - x_0 = DB^{-1} \int_{r_0}^r \tau \rho(\tau) d\tau, \quad \theta - \theta_0 = CB^{-1} \int_{r_0}^r \tau^{-1} \rho(\tau) d\tau.$$

Граница источника $r = r_0$ является звуковой поверхностью ($v = c_*$) и предельной поверхностью, где ускорение бесконечно.

Изобарические течения $p = p_0$ для подмодели классифицируются. Из общего решения таких течений для основных уравнений газовой динамики [4] в рассматриваемом случае выделяются два решения.

Формулы этих решений просто получить, переходом к лагранжевым переменным. Уравнения изобарических течений подмодели (1) образуют переопределенную систему:

$$\begin{aligned} uu_s + vv_r = 2r^{-2}vw, \quad uv_s + vv_r = r^{-1}w^2, \quad uw_s + vw_r = -r^{-1}vw, \\ (ru\rho)_s + (rv\rho)_r = 0, \quad uS_s + vS_r = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) допускают операторы ∂_s , $r\partial_r - u\partial_u$, $u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w$ и инверсию $s \rightarrow -s$, $v \rightarrow -v$. Рассматривается i -линия тока, проходящая через точку на произвольной кривой, не коллинеарной i -линии тока:

$$\frac{ds}{u} = \frac{dr}{v} = d\tau, \quad s|_{\tau=0} = \xi(l), \quad r|_{\tau=0} = \eta(l).$$

В лагранжевых координатах τ , l уравнения (7) интегрируются по τ . Условия совместности системы (7) задают связь на функции, зависящие от l , появляющиеся при интегрировании. Допускаемые операторы задают преобразования эквивалентности, действующие на решениях. С точностью до преобразований эквивалентности получается два решения с постоянными плотностью и давлением $\rho = \rho_0$, $p = p_0$:

$$u = -r^{-1} \cos s, \quad v = -\sin s, \quad w = \cos s; \quad (8)$$

$$u = 1 - r^{-1} \cos \chi, \quad v = \sin \chi, \quad w = \cos \chi, \quad s = r \sin \chi - \chi. \quad (9)$$

Решение (8) в физических переменных удобно записать в декартовых координатах $u_D = 0$, $v_D = \sin x$, $w_D = \cos x$.

Линии тока такого течения есть прямые $x = x_0$, $y \cos x_0 + z \sin x_0 = E$, лежащие в плоскости $x = x_0$ и коллинеарные в этой плоскости. Система прямых 2π — периодически поворачивается от плоскости к плоскости вокруг начала. Решение непрерывно и ограничено во всем пространстве. С помощью допускаемых системой (7) преобразований, решение переводится в решение, зависящее от 4-х произвольных постоянных. Поэтому это простое решение играет для подмодели такую же роль, какую роль выполняет постоянное решение для основных уравнений газовой динамики.

Решение (9) разрывное при $r > 1$, так как обратная функция к $s = r \sin \chi - \chi$ многозначна и нет ни одной ветви, определенной для всех значений s (Рис. 3).

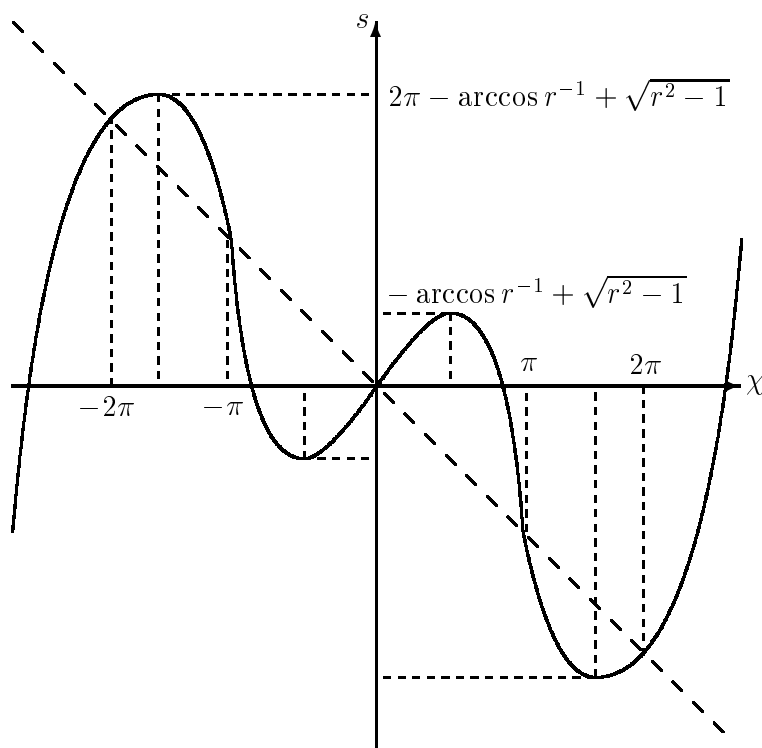
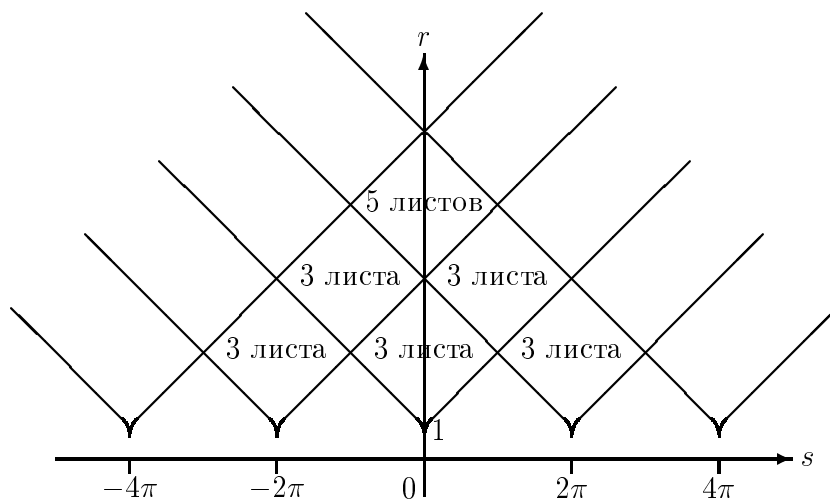
Области многозначности в плоскости (r, s) определяются кривыми точек экстремума функции $s(\chi)$: $r \cos \chi = 1$, $s = -\chi + \operatorname{tg} \chi$. Эти кривые 2π — периодические по s , имеют бесконечное число ветвей. Ветвь, проходящая через точку $(1, 0)$ имеет асимптоты $r = \pm s + \frac{\pi}{2}$ (Рис. 4).

Разрывные решения имеют физический смысл, если поверхность разрыва состоит из линий тока, в этом случае она заменяется стенкой.

Для решения (9) i -линия тока задается равенствами

$$r \cos \chi = r_0 \cos \chi_0, \quad s = -\chi - r_0 \cos \chi_0 \operatorname{tg} \chi, \quad s_0 = -\chi_0 + r_0 \sin \chi_0.$$

При $r_0 = 1$, $s_0 = 0$ получается i -линия тока, совпадающая с кривыми точек экстремума.

Рис. 3. График функции $s = r \sin \chi - \chi$ Рис. 4. Кривые точек экстремума функции $s(\chi)$: $r \cos \chi = 1$, $s = \operatorname{tg} \chi - \chi$

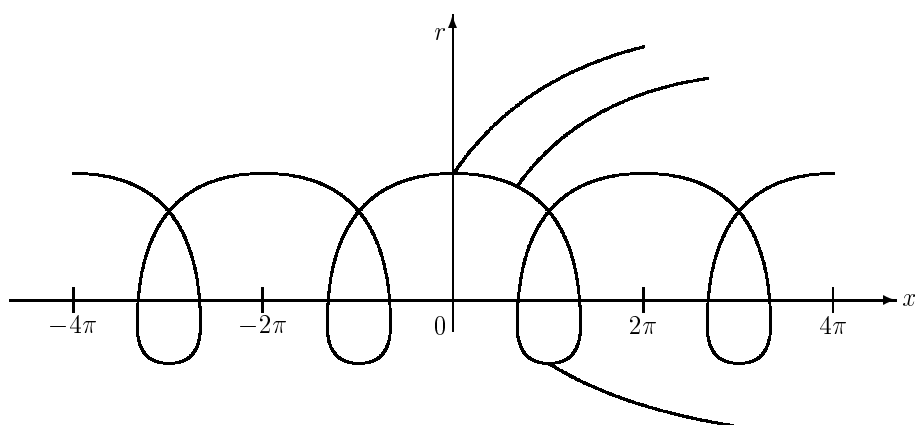


Рис. 5. Винтовая поверхность стенки, образованная вращением кривой точек экстремума вокруг оси x с движением конца кривой по винтовой линии

Линия тока для физического решения, соответствующего (9), получается из решения системы

$$dx = \frac{dr}{\sin \chi} = \frac{rd\theta}{\cos \chi} = \frac{rd\chi}{\cos \chi}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $\theta = \theta_0$, $r = r_0$, $x_0 - \theta_0 = r_0 \sin \chi_0 - \chi_0$. Решение есть прямая $r \cos (\theta - \theta_0 - \chi_0) = r_0 \cos \chi_0$, лежащая на гиперboloиде $r^2 - (x + \chi_0 - \theta_0)^2 = r_0^2 \cos^2 \chi_0$. В декартовых координатах эти прямые задаются как линии пересечения плоскостей

$$\begin{aligned} y \cos (\chi_0 - \theta_0) - z \sin (\chi_0 - \theta_0) &= r_0 \cos \chi_0, \\ x + \chi_0 - \theta_0 &= y \sin (\chi_0 - \theta_0) + z \cos (\chi_0 - \theta_0). \end{aligned}$$

Предложение 3. В физическом пространстве i -линии тока задают поверхности, на которых лежат все линии тока инвариантного решения.

Отсюда следует, что если поместить стенки вместо одного из семейств кривых точек экстремумов, направленных в одну сторону, то в оставшемся пространстве будет i -непрерывное решение, и ему будет соответствовать непрерывное физическое течение. Точкам $r_k = 1$, $s_k = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствует винтовая линия. Семейству кривых точек экстремума в физическом пространстве соответствует винтовая поверхность, образованная вращением кривой точек экстремума вокруг оси x с одновременным движением конца этой кривой по винтовой линии (Рис. 5).

Рассматриваются некоторые дифференциально инвариантные решения. Подмодель (1) допускает перенос. Это не продолжаемый оператор, поэтому дифференциальными инвариантами будут все функции и их производные. Любое соотношение между ними является дифференциально

инвариантным многообразием. Важно найти соотношение, при котором происходит расширение допускаемой алгебры.

Одним из таких соотношений является равенство $p_s = 0$, предложенное Капцовым О. В. [5]. При этом добавляются растяжения $u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w - 2\rho\partial_\rho, r\partial_r - u\partial_u$. Если ввести i -функцию тока, то наряду с имеющимися i -интегралами появится еще один:

$$\begin{aligned} w &= D(\psi)r^{-1}, & u &= (r\rho)^{-1}\psi_r = B(\psi) + D(\psi)r^{-2}, \\ v &= -(r\rho)^{-1}\psi_s, & S &= S(\psi), & \rho &= R(p(r), \psi). \end{aligned}$$

В результате уравнения подмодели с $p = p(r)$ равносильны следующей переопределенной системе для i -функции тока $\psi_r = R(Br + Dr^{-1})$, $-(Br^2 + D)(r^{-1}R^{-1}\psi_s)_s + rR^{-1}\psi_s(r^{-1}R^{-1}\psi_s)_r + r^2R^{-1}p' = D^2r^{-1}$.

Вводятся новые независимые переменные r, ψ , интегрируется одно из уравнений по r и появляется произвольная функция $E(\psi)$: $Rs_\psi = M, s_r = -(rB + r^{-1}D)M$; $M = (Er^2 - D^2 - r^2 \int R^{-1}dp)^{-\frac{1}{2}}$.

Условие совместности является уравнением для функции $R(p, \psi)$:

$$\begin{aligned} &(rB' + r^{-1}D' - R^{-2}R_p p') \left(Er^2 - D^2 - r^2 \int R^{-1}dp \right) = \\ &= R^{-1} \left(rE - \frac{1}{2}r^2 R^{-1}p' - r \int R^{-1}dp \right) + \\ &+ (rB + r^{-1}D) \left(\frac{1}{2}E'r^2 - DD' + \frac{1}{2}r^2 \int R^{-2}R_\psi dp \right). \end{aligned}$$

Итак, решение с $p = p(r)$ подмодели (1) существует лишь для специальных уравнений состояния. Семейство допустимых уравнений состояния зависит от произвольных функций B, D, E, S, p .

Другое дифференциально инвариантное решение — безвихревое течение: $rot \vec{u}_c = 0$. В инвариантах это условие принимает вид:

$$u + (r + r^{-1})w = B = const, \quad v_s + (rw)_r = 0.$$

Вводится i -потенциал скорости $\lambda(r, s)$: $v = \lambda_r, w = -r^{-1}\lambda_s, u = B + (1 + r^{-2})\lambda_s$. Потенциал скоростей $\varphi(x, r, \theta)$: $U = \varphi_x, V = \varphi_r, W = r^{-1}\varphi_\theta$, связан с i -потенциалом формулой $\varphi = \lambda + Bx$.

Из уравнений (1) после введения i -потенциала скоростей следует равенство

$$2B\lambda_s + (1 + r^{-2})\lambda_s^2 + \lambda_r^2 + 2 \int \rho^{-1}dp = C = const.$$

Итак, функции $a(\psi), b(\psi)$ в i -интегралах для безвихревых течений постоянны.

Для безвихревого течения справедливо соотношение $\nabla_c \rho \times \nabla_c S = 0$ [3]. Отсюда следует: $\rho = \rho(S)$, либо $S = S_0 = const$.

Предложение 4. Неизэнтропическое безвихревое i -движение является частным случаем ∂_s — инвариантного решения с $v = 0$.

Изнэнтропическое безвихревое i — движение описывается одним квазилинейным уравнением второго порядка для i -потенциала скоростей

$$\begin{aligned} & \left[(B + (1 + r^{-2}) \lambda_s)^2 - (1 + r^{-2}) c^2 \right] \lambda_{ss} + 2\lambda_r (B + (1 + r^{-2}) \lambda_s) \lambda_{sr} + \\ & + (c^2 - \lambda_r^2) \lambda_{rr} = r^{-1} \lambda_r (c^2 + r^{-2} \lambda_s^2), \\ & 2B\lambda_s + (1 + r^{-2}) \lambda_s^2 + \lambda_r^2 + 2 \int c^2 \rho^{-1} d\rho = C. \end{aligned}$$

3. Важно знать свойства решений подмодели без особенности на оси $r = 0$. Разыскиваются решения в виде рядов по неотрицательным степеням r . Подстановка в уравнения (1) приводит к необходимому условию на вид рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k \geq 0} u_k r^k, \quad v = r \sum_{k \geq 0} v_k r^k, \quad w = r \sum_{k \geq 0} w_k r^k, \quad \rho = \sum_{k \geq 0} \rho_k r^k, \\ p &= \sum_{k \geq 0} p_k r^{k+2} + P, \quad A = \rho c^2 = \sum_{k \geq 0} A_k r^k, \\ A_k &= (k!)^{-1} D_r^k A(p, \rho)|_{r=0} = A_\rho^0 \rho_k + A_p^0 p_{k-2} + A_{\rho\rho}^0 \rho_1 p_{k-3} + \dots, \\ A_0 &= A^0 = A(P, \rho_0), \quad P - \text{постоянная.} \end{aligned} \quad (10)$$

Для величин нулевого порядка получается система

$$\begin{aligned} (u_0 u'_0 - 2v_0 w_0) \rho_0 + p'_0 &= 0 \\ (u_0 v'_0 + v_0^2) \rho_0 + 2p_0 &= 0 \\ 2v_0 w_0 \rho_0 - p'_0 &= 0 \\ u_0 \rho'_0 + \rho_0 (u'_0 + 2v_0) &= 0 \\ u_0 p'_0 + 2v_0 p_0 + A_0 (u'_0 + 2v_0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение системы (11) таково: $u_0 = B$ — постоянная,

$$v_0 = -\frac{1}{2} B \rho_0^{-1} \rho'_0, \quad p_0 = \frac{1}{4} B^2 \left(\rho''_0 - \frac{3}{2} \rho_0^{-1} \rho'^2_0 \right), \quad w_0 = -B^{-1} \rho'_0 \rho'^{-1}_0$$

при $B \neq 0$; уравнение для ρ_0 :

$$\rho_0^2 \rho'''_0 - 4\rho_0 \rho'_0 \rho''_0 + 3\rho_0^3 - \rho_0 \rho'_0 A(P, \rho_0) = 0$$

интегрируется заменой $\rho'_0 = \omega^{\frac{1}{2}}(\rho_0)$:

$$\omega = 2\rho_0^3 \int \rho_0^{-3} A_0 d\rho_0 - 2\rho_0^2 \int \rho_0^{-2} A_0 d\rho_0 + C_1 \rho_0^2 + C_2 \rho_0^3.$$

Итак, получается решение в виде

$$s = s_0 = \int_{\rho_1}^{\rho_0} \omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) d\tau.$$

Для политропного газа $A_0 = \gamma P$ функция выражается через обратные эллиптические функции

$$s - s_0 = \int_{\rho_1}^{\rho_0} (C_2 \tau^3 + C_1 \tau^2 + \gamma P \tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau$$

и следовательно, является периодической функцией.

При $B = 0$ следует $u_0 = v_0 = p_0 = 0$, $w_0(s)$, $\rho_0(s)$ — произвольные функции. Для величин порядка k , $k \geq 1$ получается система

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 u'_k + p'_k &= -k \rho_0 v_0 u_k + 2 \rho_0 w_0 v_k + 2 \rho_0 v_0 w_k + 2 v_0 w_0 \rho_k + g_{1k}, \\ \rho_0 u_0 v'_k &= -\rho_0 u'_0 u_k - (k+2) \rho_0 v_0 v_k + 2 \rho_0^{-1} p_0 \rho_k - (k+2) p_k + g_{2k}, \\ \rho_0 u_0 w'_k - p'_k &= -\rho_0 w_0 u_k - 2 \rho_0 w_0 v_k - (k+2) \rho_0 v_0 w_k - \\ &\quad - (u_0 w'_0 + 2 w_0 v_0) \rho_k + g_{3k}, \\ u_0 \rho'_k + \rho_0 u'_k &= -\rho'_0 u_k - (k+2) \rho_0 v_k - (k+2) v_0 \rho_k + g_{4k}, \\ u_0 p'_k + A_0 u'_k &= -p'_0 u_k - (2 p_0 + (k+2) A_0) v_k - 2 A_0^0 v_0 \rho_k - \\ &\quad - (k+2) v_0 \rho_k + g_{5k}, \end{aligned} \quad (12)$$

где g_{ik} — выражения, содержащие величины порядка меньше k .

Эта система будет нормальной системой, если из первого и последнего уравнений системы (12) найдутся u'_k , p'_k , т.е. $\rho_0 (u_0^2 - c_0^2) \neq 0$.

Если $|u_0| = c_0$, то комбинация отмеченных уравнений определяет p_k при $v_0 \neq 0$, а для оставшихся функций k -го порядка получается нормальная система.

Сходимость рядов (10) в окрестности $r = 0$ с периодическими по s приближениями следует из теоремы Коши–Ковалевской для системы (1).

Неособые решения при $r \rightarrow \infty$ разыскиваются в виде рядов по неположительным степеням r . В нулевом приближении получается система $u u'_0 + \rho_0^{-1} p'_0 = 0$, $u_0 v'_0 = 0$, $u_0 w'_0 = 0$, $(u_0 \rho_0)' = 0$, $u_0 p'_0 + A(\rho_0, p_0) u'_0 = 0$.

При $u_0 \neq 0$ получается два постоянных решения

$$\begin{aligned} u_0 &= B \rho_0^{-1}, \quad v_0 = D, \quad w_0 = E, \quad S_0 = S_{00}, \quad p_0 = f(\rho_0, S_{00}), \\ B^2 \rho_0^{-2} + 2 \int_{\rho_1}^{\rho_0} \tau^{-1} f_\rho(\tau, S_{00}) d\tau &= C^2, \end{aligned}$$

так как последнее уравнение для ρ_0 имеет два корня (они сливаются в один при $|u_0| = c_0$).

При $u_0 = 0$, $p_0 = P$ — постоянная, $v_0(s)$, $w_0(s)$, $\rho_0(s)$ — произвольные функции.

Для величин k -го порядка получается система

$$\begin{aligned} \rho_0 u_0 u'_k + p'_k &= g_{1k}, & \rho_0 u_0 v'_k &= g_{2k}, & \rho_0 u_0 w'_k &= g_{3k}, \\ u_0 \rho'_k + \rho_0 u'_k &= g_{4k}, & A_0 u'_k + u_0 p'_k &= g_{5k}, \end{aligned} \quad (13)$$

где выражения g_{ik} содержат величины порядка меньше k .

Система (13) нормального типа, если $|u_0| \neq c_0$. Если $|u_0| = c_0$, то из системы $(k+1)$ -го порядка определяется линейное уравнение для величин k -го порядка, которое вместе с уравнениями системы (13) образует нормальную систему. Важно найти 2π — периодические по s решения.

Сходимость рядов доказывается по теореме Коши–Ковалевской.

Если бы области сходимости рядов, построенных в окрестностях точек $r = 0$ и $r = \infty$ пересекались по некоторой области, то получилось бы решение в бесконечной криволинейной полосе. Это решение задает в физическом пространстве течение в винтообразной области.

Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. Программа подмодели. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 54, вып. 4. С. 30–55.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
- [3] Овсянников Л. В. Лекции по газовой динамике. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [4] Овсянников Л. В. Изобарические течения // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
- [5] Калцов О. В. Точные решения уравнений осесимметричного течения идеального газа // Динамика сплошной среды. Вып. 91. Новосибирск, 1989. С. 37–47.