



УДК 519.63+532.5

СРАВНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ

Д. М. Балапанов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ нескольких численных методов решения гиперболических уравнений с целью выбора наиболее эффективного из них для расчета ударно-волновых течений. Вычислительная эффективность определяется по соотношению затрачиваемого машинного времени и погрешности полученного результата. На задаче о распаде произвольного разрыва отдельно протестированы схемы дискретизации по времени и по пространству. По результатам тестирования выбрано их оптимальное сочетание. Полученный алгоритм превосходит все остальные по точности и производительности вычислений во всем исследованном диапазоне изменения числа Куранта и шага по пространству.

Ключевые слова: численное моделирование, ударные волны, газовая динамика, вычислительная эффективность

Одной из актуальнейших задач газовой динамики является исследование ударных волн, которые в теории рассматриваются как разрывы физических параметров среды, локализованные в бесконечно малой по толщине области. Эта особенность математической модели требует от численного решения отсутствия ложных осцилляций, вызванных дисперсионной ошибкой, и как можно меньшей «размазанности» фронта ударной волны. В литературе указываются порядки точности, рассчитанные методом вложенных сеток на, как правило, *гладком* решении одного простого уравнения, например, уравнения переноса. Представляет методический интерес исследовать точность основных современных методов при решении систем уравнений, допускающих существование *разрывных* решений,

а именно при моделировании распространения ударных волн в газе.

Другой важный критерий для выбора конкретного вычислительного алгоритма — это его ресурсоемкость, которая, в итоге, выражается в машинном времени, расходуемом на расчет. Однако, применительно к конкретным методам этот вопрос в литературе практически не обсуждается. Целью работы является сравнить показатели вычислительной эффективности (производительности и точности) нескольких распространенных численных схем, используемых при моделировании ударных волн, и найти оптимальные условия для применения каждого из них. Методика исследования — реализация исследуемых алгоритмов и последовательные расчеты на тестовых задачах.

Для сравнения выбраны четыре схемы дискретизации производных по пространству:

- TVD-схема 1-го порядка (далее по тексту TVD-1);
- TVD-схема 3-го порядка (TVD-3S);
- ENO-схема 4-го порядка (ENO-4);
- WENO-схема 5-го порядка (WENO-5).

Развернутая теория перечисленных методов, информация об устойчивости и сходимости на гладких решениях приводятся в работах [1]–[4]. Общая последовательность вычислений на каждом шаге по времени такова:

1. Вычисление зависимых переменных на границах ячеек (используется солвер $Рou$ [4], дающий приближенное решение задачи о распаде разрыва между двумя ячейками);
2. Нахождение собственных векторов характеристической матрицы системы из значений переменных, рассчитанных на 1-ом этапе;
3. Реконструкция потоков через границы ячеек в характеристическом пространстве переменных;
4. Восстановление физических переменных.

Рассматриваемые методы отличаются только реализацией 3-го этапа (различные шаблоны, алгоритмы интерполяции и анализа гладкости решения). Объективность сравнения обеспечивается тем, что процедура шага по времени, вычисление зависимых переменных и собственных векторов между пространственными ячейками для каждого метода осуществлялись абсолютно идентично. Дополнительная гарантия — исключение повторных вычислений в кодах реконструкции потоков.

Общее для всех схем условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви:

$$\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C \leq 1, \quad (1)$$

где λ — максимум среди собственных чисел характеристической матрицы; Δt — шаг по времени; Δx — шаг по пространству; C — эмпирически выбираемая постоянная Куранта.

Единичный акт проведенного тестирования — решение задачи о распаде произвольного разрыва. Записанная в дивергентной форме система уравнений динамики невязкого нетеплопроводного газа в случае одной пространственной переменной x имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) &= 0; \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v(e + p)) &= 0; \\ e = \frac{\rho v^2}{2} + \rho u = 0; \quad u &= \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность; v — скорость; p — давление; γ — показатель адиабаты политропного газа; e — полная механическая энергия; ρu — внутренняя энергия газа. Ниже записана конкретная постановка задачи Римана для уравнений (2):

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 0.2; \quad 0 \leq x \leq 1.0; \\ \begin{cases} p = 1.0, & v = 0.0, & \rho = 1.0, & \gamma = 1.4, & (x < 0.5); \\ p = 0.1, & v = 0.0, & \rho = 0.125, & \gamma = 1.4, & (x \geq 0.5). \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Конечный момент времени выбран таким образом, чтобы возмущения не успевали достигнуть границ области.

Использовалась неподвижная пространственная сетка. Величина следующего шага по времени вычислялась в программе из условия (1) на предыдущем шаге. Для уменьшения ошибок округления использовались безразмерные переменные, вводимые следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u} - \min_{0 \leq x \leq 1} \mathbf{u}}{\max_{0 \leq x \leq 1} \mathbf{u} - \min_{0 \leq x \leq 1} \mathbf{u}}. \quad (4)$$

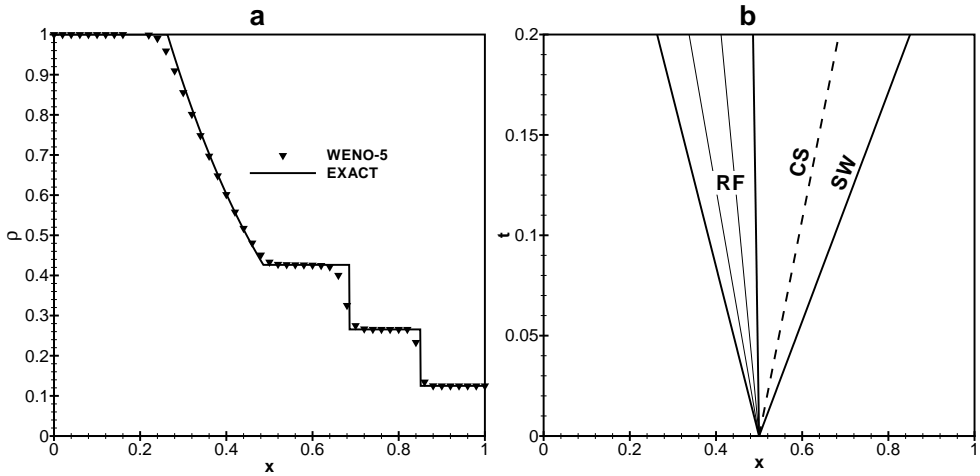


Рис. 1. Численное (WENO-5; $N = 100$) и точное решение задачи (2)–(3) для плотности при $t = 0.2$ (а); вид точного решения в плоскости $x - t$ (б)

В качестве критерия глобальной погрешности взята усредненная по всем переменным среднеквадратичная норма по всей области:

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N (u_k^i - U_k^i)^2}. \quad (5)$$

В (5) N — число узлов сетки; U_k^i — точное значение i -ой переменной, найденное в k -ом узле. Величина ε рассчитывалась в момент времени $t = 0.2$ с помощью процедуры, вычисляющей точное решение задачи Римана [5] итерационным методом со сколь угодно малой ошибкой. Аналитически и численно рассчитанное распределение $\rho(x, t = 0.2)$ изображено на Рис. 1(а). Вид точного решения при начальном условии (3) показан на Рис. 1(б). Области постоянного решения разделены линиями контактного разрыва (CS) и ударной волны (SW), и границами простой волны, в пределах которой (сектор RF) решение меняется непрерывно.

Из поведения кривых сеточной сходимости на Рис. 2(а) следует, что TVD-3S, ENO-4 и WENO-5 демонстрируют практически одинаковую скорость сходимости. Это говорит о существенном ухудшении точности для ENO-4 и WENO-5 относительно гладкого решения. Вблизи скачков переменных (фронта ударной волны и контактного разрыва) порядок точности методов TVD-3S, ENO-4 и WENO-5, вычисленный методом Рунге [6] из данного расчета, стремится к 1, а порядок TVD-1 — к 0.7.

Обратимся к показателям скорости счета: на Рис. 2(б) изображены за-

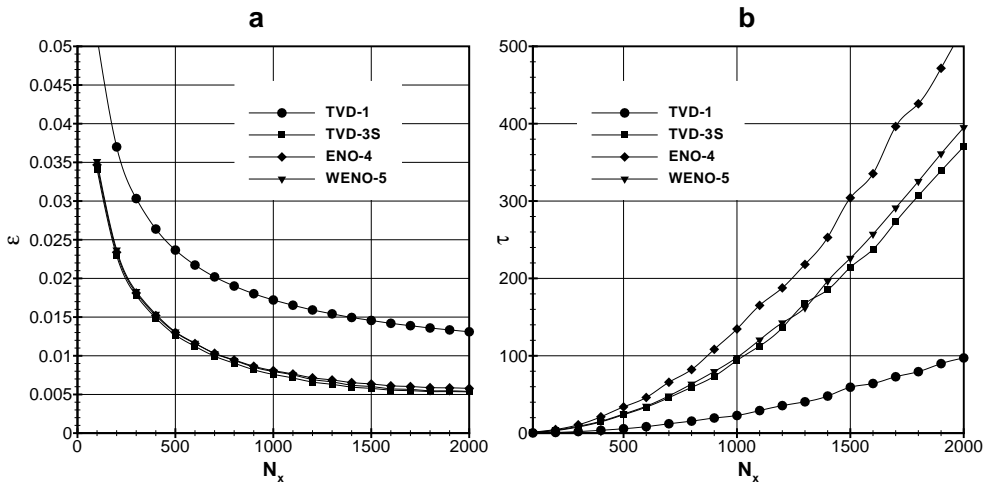


Рис. 2. Норма погрешности (а) и время счета (б) на измельчающихся сетках. TVD-3T; постоянная Куранта $C = 0.6$

висимости относительного времени счета от требуемой точности (5). Этот график характеризует «громоздкость» процедуры вычисления потоков, используемой в конкретном методе. Кривые имеют негладкий характер в связи с неизбежными ошибками программного измерения времени в многозадачной операционной системе. Процедура реконструкции потоков TVD-1 наиболее проста, вследствие чего производительность этой схемы наибольшая. Ее можно использовать, например, для быстрых оценочных расчетов. ENO-4 имеет минимальную скорость счета из-за разветвленной логической структуры, которая реализует выбор наилучшего шаблона для реконструкции. Ресурсоемкости схем TVD-3 и WENO-5 почти одинаковы. На графике, комбинирующем два предыдущих результата (Рис. 3), TVD-3S несколько опережает WENO-5, что, видимо, обусловлено применением четырехточечного симметричного шаблона для реконструкции, в отличие от пятиточечного несимметричного у WENO-5.

TVD-3S получает решение, наиболее близкое к точному в течение наименьшего времени и, следовательно, обладает лучшей вычислительной эффективностью среди всех рассматриваемых схем. Однако, она сложнее в реализации, чем WENO-5, что тоже немаловажно при выборе численного метода. Вообще, ряд по возрастанию сложности реализации выглядит так: TVD-1, WENO-5, TVD-3S, ENO-4.

Все расчеты, результаты которых приведены выше, проводились с использованием TVD-схемы Рунге-Кутты 3-го порядка точности [7] (далее по тексту TVD-3T) для представления производной по времени. Исполь-

зование данной схемы существенно повышает устойчивость алгоритма в целом, подавляя дисперсионную ошибку схем дискретизации по пространству высокого порядка. Это позволяет проводить расчеты при значениях числа Куранта, близких к 1, что приводит к значительному уменьшению числа шагов по времени (это особенно важно для «медленных», но точных схем по пространству) и повышает точность выделения разрывов. Следует добавить, что, будучи явной трехэтапной схемой, TVD-3T очень проста в реализации.

На Рис. 4(а) даны графики зависимости относительной погрешности вычислений от числа Куранта для TVD-3T и схемы Эйлера 1-го порядка. При малых числах Куранта точность одинакова, но, начиная с какого-то критического значения, вторая схема дает все большую погрешность (возникновение ложных осцилляций вблизи разрывов) и в определенный момент значение погрешности начинает расти неограниченно (появляются отрицательные значения плотности или давления, после этого счет прерывается). А первая схема при этом обеспечивает невозрастающее значение погрешности. Такая же картина наблюдается при любых значениях N для всех схем по пространству (кроме TVD-1, которая дальше не рассматривается из-за низкой вычислительной эффективности).

Рис. 4(б) позволяет увидеть непосредственно влияние применяемой дискретизации по времени на устойчивость и точность алгоритма. По оси ординат отложен показатель вычислительной эффективности, рассчитываемый по формуле [8]:

$$E = \frac{1}{\varepsilon \tau}. \quad (6)$$

Применение схемы Эйлера оправдано при $C < 0.4$, при больших числах Куранта ее использовать бессмысленно из-за возникновения нефизичных осцилляций решения. Поскольку E для TVD-3T больше, чем для схемы Эйлера при $C < 0.4$, то следует использовать для дискретизации по времени схему TVD-3T, задавая число Куранта близкое к 1.

Из проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Порядок точности метода, рассчитанный на гладком решении, не может служить показателем точности для разрывных решений;
2. Лучшим по вычислительной эффективности алгоритмом из рассмотренных является сочетание TVD-3S по пространству и TVD-3T по времени, при условии $C \approx 1$;
3. Тип дискретизации по времени существенно влияет на точность решения и правильный выбор схемы позволит сэкономить машинное время.

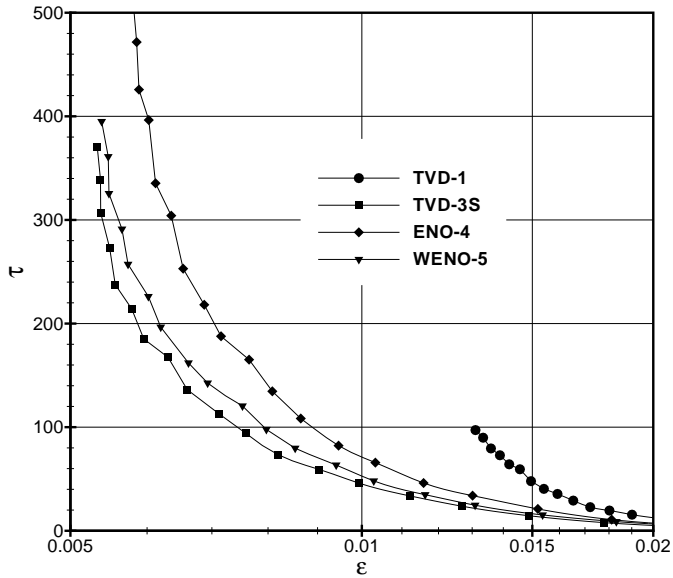


Рис. 3. Время, затрачиваемое на расчет с заданной точностью. TVD-3T; постоянная Куранта $C = 0.6$

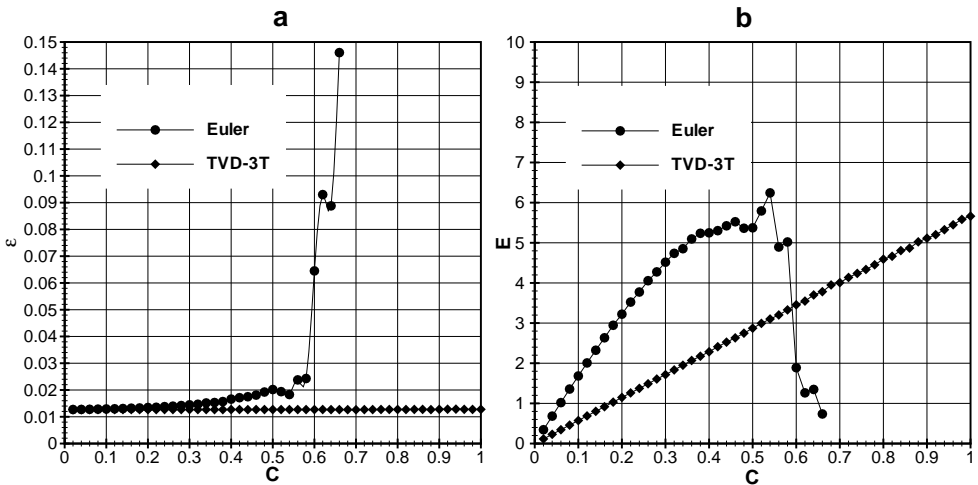


Рис. 4. Норма ошибки (а) и показатель вычислительной эффективности (б) в зависимости от числа Куранта для TVD-3T и схемы Эйлера по времени. TVD-3S; число узлов сетки $N = 500$

Список литературы

- [1] Roe P. L. Characteristics based schemes for the Euler equations // Ann. Rev. Fluid Mech. V. 18. 1986. P. 337–365.
- [2] Chakravarthy S. R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Report № 85-0363. 1985. 11 P.
- [3] Shu C.-W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // ICASE Report № 97-65. 78 P.
- [4] Roe P. L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comp. Physics. V. 43. 1981. P. 357–372.
- [5] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [6] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
- [7] Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E. Strong stability preserving high order time discretization methods // SIAM Review, 43(2001) P. 89–112.
- [8] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М: Мир, 1991. 504 с.