



# ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ, ПРИ НАДВИГАХ И СДВИГАХ ЗЕМНОЙ КОРЫ

*М. И. Давлетов,\* Ю. В. Казанцев,\* А. Г. Хакимов \*\**

\* Институт геологии УНЦ РАН, Уфа

\*\* Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Исследуется движение и напряженно-деформированное состояние магистрального трубопровода с избыточным внутренним давлением в сильно вязкой среде при изменении его температуры, а также при надвигах и сдвигах земной коры. Учитываются усилия натяжения, обусловленные избыточным внутренним давлением и изменением температуры.

**Ключевые слова:** влияние температуры, напряженно-деформированное состояние, магистральный трубопровод, вязкая среда, надвиги и сдвиги земной коры

---

## 1 Введение

Изменение пространственного положения магистрального трубопровода также может происходить при надвигах и сдвигах земной коры. Надвигом (геол.) считается перемещение одной части земной коры относительно другой по поверхности скольжения [1]. При надвиге земной коры, например, правая часть магистрального трубопровода вместе с грунтом перемещается влево и вверх. При сдвиге земной коры вектор относительного перемещения частей земной коры перпендикулярен осевой линии трубопровода.

Здесь рассматривается медленное движение и напряженно-деформированное состояние трубопровода под действием сил упругости, внутреннего давления, нелинейного сопротивления внешней среды при изменении его

температуры, а также при надвигах и сдвигах земной коры. Перемещения при этом могут быть конечными, но деформации считаются малыми. При выводе уравнений движения учитывается сила продольного натяжения, возникающая в результате поперечного перемещения трубопровода и изменения температуры. Всеми колебательными процессами во внутреннем потоке жидкости мы пренебрегаем, так как изучаемое явление имеет другой масштаб по времени.

## 2 Физическая постановка задачи

Трубопровод рассматривается как упругий полый стержень, который погружен в сильно вязкую среду. В начальном состоянии трубопровод имеет нулевую кривизну. Учитывается начальная погрешность монтажа, внешняя среда считается вязкой жидкостью. Задается вектор скорости перемещения правого конца трубопровода

$$\bar{V} = \{V_x, V_y, V_z\},$$

где  $V_x, V_y, V_z$  — проекции скорости на оси  $x, y, z$ . При надвигах земной коры отличная от нуля проекция скорости правого конца трубопровода на оси  $x$  и  $z$ . Концы трубопровода считаем заземленными. Предполагается, что деформации стержня малы, а поперечные перемещения конечны, но малы по сравнению с длиной стержня; сила натяжения стержня, возникающая в результате его изгиба, равномерно распределена по его длине; на больших интервалах времени внешняя среда описывается уравнениями очень вязкой жидкости; силами инерции стенки трубопровода и жидкости можно пренебречь. Требуется найти движение трубопровода.

## 3 Вывод уравнения движения

Будем искать нормальные перемещения стержня  $w_n$  как функцию времени  $t$  и длины дуги  $s$ :

$$w_n(s, t) = w(s, t) + \delta_0 \sin^2\left(\frac{\pi s}{L}\right), \quad (1)$$

где  $w(s, t)$  — дополнительный прогиб;  $L$  — длина трубопровода;  $\delta_0$  — амплитуда начального прогиба.

Пусть на элемент изогнутой трубы действуют концевые и распределенные нагрузки. В данной постановке задачи пренебрегаем продольными распределенными нагрузками по сравнению с поперечными, кроме силы натяжения. Учитываем давление внутри трубопровода. Тогда распределенная нагрузка  $q_n$  на трубопровод выразится формулой [2]:

$$q_n = q_{nr} + P_i F_i \kappa, \quad \kappa = \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2}, \quad F_i = \pi r_0^2, \quad (2)$$

где  $q_{nr}$  — сила сопротивления среды на единицу длины трубы;  $P_i$  — внутреннее давление в трубе;  $\kappa$  — кривизна трубопровода;  $F_i$  — площадь проходного сечения трубы;  $r_0$  — внутренний радиус трубопровода.

Дифференциальные уравнения движения стержня в деформированном состоянии имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial s} - \kappa Q = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \kappa T - q_n = 0; \quad Q = -\frac{\partial M}{\partial s}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $T$  — сила продольного натяжения трубопровода;  $Q$  — перерезывающая сила;  $M$  — изгибающий момент.

Используя выражение связи между изгибающим моментом и изменением кривизны упругой линии

$$M = EI(\kappa - \kappa_n), \quad I = \frac{\pi(R_0^4 - r_0^4)}{4}, \quad R_0 = r_0 + h,$$

где  $E$  — модуль Юнга материала трубы;  $I$  — осевой момент инерции поперечного сечения трубопровода;  $R_0$ ,  $h$  — наружный радиус и толщина стенки трубопровода, а  $\kappa_n = 0$  — кривизна осевой линии недеформированного трубопровода, получим:

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial s} = -EI \frac{\partial \kappa}{\partial s}. \quad (4)$$

Далее, полученное выражение подставляем в первое уравнение системы:

$$\frac{\partial T}{\partial s} - \kappa Q = \frac{\partial T}{\partial s} + EI \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\kappa^2}{2} \right) = 0,$$

$$T + EI \frac{\kappa^2}{2} = C = T_0 + EI \frac{\kappa_0^2}{2},$$

где индекс «0» относится к параметрам трубопровода в каком-либо сечении, например, при  $x = 0$ . Для трубопровода с заземленными краями

$$T_0 = T_0^p + T_0^T + T_0^e + T_0^w, \quad T = T_0^p + T_0^T + T_0^e + T^w,$$

$$T_0^p = 2P_i F_i \nu, \quad T_0^T = -\alpha \Delta t E F,$$

где  $T_0^p, T_0^T, T_0^e$  — начальные усилия натяжения, обусловленные избыточным внутренним давлением, изменением температуры, режимом эксплуатации трубопровода;  $T_0^w$  — усилие натяжения в сечении  $x = 0$ , возникающее при нагружении трубопровода;  $\Delta t$  — изменение температуры трубопровода;  $\nu, \alpha$  — коэффициенты Пуассона и теплового расширения материала трубопровода. Отсюда следует, что

$$T^w = T_0^w + EI \frac{\kappa_0^2}{2} - EI \frac{\kappa^2}{2}. \quad (5)$$

С другой стороны, для линейной зависимости продольного натяжения от относительного удлинения:

$$T^w = EF\varepsilon = EF \left[ \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 \right],$$

где  $F = 2\pi r_0 h$  — площадь поперечного сечения трубы;  $\varepsilon$  — относительное удлинение;  $u_n$  — продольное перемещение элемента трубопровода, тогда

$$T = C - EI \frac{\kappa^2}{2} = T_0^p + T_0^T + T_0^e + EF \left[ \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 \right].$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\int_0^L \frac{C - T_0^p - T_0^T - T_0^e}{EF} ds - \frac{I}{2F} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} \right)^2 ds = \int_0^L \frac{\partial u_n}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds.$$

Далее, используя граничные условия:

$$s = 0, \quad u_n = 0, \quad s = L, \quad u_n = V_x t,$$

определим, что

$$\begin{aligned} \frac{(C - T_0^p - T_0^T - T_0^e)L}{EF} &= u_n(L) - u_n(0) + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds + \\ &+ \frac{I}{2F} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} \right)^2 ds = V_x t + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{I}{2F} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Используя (5), получим, что сила продольного натяжения трубопровода равна

$$\begin{aligned} T &= T_0^p + T_0^T + T_0^e + \frac{EF}{L} \times \\ &\times \left[ V_x t + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial w_n}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{I}{2F} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} \right)^2 ds \right] - \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} \right)^2. \quad (6) \end{aligned}$$

После преобразований второе уравнение системы примет вид:

$$EI \frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - (T - P_i F_i) \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + q_{nr} = 0. \quad (7)$$

Сила сопротивления среды  $q_{nr}$ , отнесенная к единице длины, определяется формулой Ламба [3]:

$$q_{nr} = \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/\gamma\rho_{gr}Ru|}, \quad (8)$$

где  $\mu$  — вязкость среды;  $\rho_{gr}$  — плотность среды;  $u$  — скорость поперечного перемещения цилиндра;  $R$  — радиус цилиндра;  $\gamma = 1,7811$  — число Маскерони.

Подставляя (2) в (7) и заменяя  $R$  на  $R_0$ , получим уравнение движения изогнутого трубопровода в вязкой среде:

$$EI \frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} - (T - P_i F_i) \frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/\gamma\rho_{gr}R_0u|} = 0; \quad (9)$$

$$u = \frac{\partial w_n}{\partial t}.$$

Подставляя (1) в уравнение (9), получим:

$$\begin{aligned} & EI \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - \frac{8EI\pi^4 \delta_0}{L^4} \cos \frac{2\pi s}{L} - \left\{ T_0^p + T_0^T + T_0^e + \frac{EF}{2L} \times \right. \\ & \times \left[ 2 \cdot V_{xt} + \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{2\delta_0\pi}{L} \int_0^L \sin \frac{2\pi s}{L} \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{\delta_0^2\pi^2}{2L} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{I}{F} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 ds + \frac{4\delta_0\pi^2}{L^2} \int_0^L \cos \frac{2\pi s}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds + \frac{2\delta_0^2\pi^4}{L^3} \right] \right] - \right. \\ & \left. - \frac{EI}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{2\delta_0\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi s}{L} \right)^2 - P_i F_i \right\} \times \\ & \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{2\delta_0\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi s}{L} \right) + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/\gamma\rho_{gr}R_0u|} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Уравнения (10) дополним однородными начальными и краевыми условиями:

$$\begin{cases} w = 0; & t = 0; \\ w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0, & s = 0, \quad s = L. \end{cases} \quad (11)$$

Система (10), (11) представляет собой нелинейную начально-краевую задачу относительно неизвестных функций  $w$ ,  $u$ . Решение этой системы описывает перемещения трубопровода только в том случае, если они малы по сравнению с начальным радиусом кривизны его оси, а также, если допустима гипотеза плоских сечений.

Для решения задачи (10), (11) выберем явную двухслойную разностную схему по времени. Дискретизацию по пространству проведем интегроинтерполяционным методом. В результате получим разностное соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h_s^4} \left( w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j \right) - \frac{8EI\pi^4\delta_0}{L^4} \cos \frac{2\pi s_i}{L} - \\ & - \left\{ T_0^p + T_0^T + T_0^e + \frac{EF}{2L} \left\{ 2V_x t^j + \sum_{i=i_1}^{i_2-i_1} \frac{\left( w_{i+1}^j \right)^2 - 2w_{i+1}^j w_{i-1}^j + \left( w_{i-1}^j \right)^2}{4h_s} + \right. \right. \\ & \quad + \sum_{i=i_1}^{i_2-i_1} \frac{2\pi\delta_0}{L} \sin \frac{2\pi s_i}{L} \frac{w_{i+1}^j - w_{i-1}^j}{2} + \frac{\delta_0^2\pi^2}{2L} + \frac{I}{F} \times \\ & \quad \times \left[ \sum_{i=i_1}^{i_2-i_1} \frac{\left( w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j \right)^2}{h_s^3} + \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4\delta_0\pi^2}{L^2} \sum_{i=i_1}^{i_2-i_1} \cos \frac{2\pi s_i}{L} \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h_s} + \frac{2\delta_0^2\pi^4}{L^3} \right] \right\} - \\ & - \frac{EI}{2} \left( \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h_s^2} + \frac{2\delta_0\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi s_i}{L} \right)^2 - P_i F_i \left\{ \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h_s^2} + \frac{2\delta_0\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi s_i}{L} \right) + \frac{4\pi\mu u}{0,5 + \ln |4\mu/\gamma\rho_{gr}R_0u|} = 0; \right. \end{aligned}$$

$$w_i^j = \frac{1}{h_t} \left( w_i^{j+1} - w_i^j \right).$$

Здесь  $j$  — номер слоя по времени;  $i$  — номер точки по координате  $s$ ;  $i_1, i_2$  — значения  $i$  на опорах;  $h_s, h_t$  — шаг сетки по координате и времени соответственно;  $u$  — скорость элемента трубы. Краевые и начальные условия учитываются обычным образом.

Шаг по времени и координате выбирался опытным путем из требований устойчивости и точности.

При решении задачи были выбраны следующие параметры:  $r_0 = 693.5$  мм — внутренний радиус трубопровода;  $L = 1000$  м — длина трубопровода;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па — модуль Юнга материала трубы,  $\nu = 0.3$  — коэффициент Пуассона материала трубопровода;  $\rho_{gr} = 1700$  кг/м<sup>3</sup> — плотность внешней среды;  $\mu = 1000$  Па · с — вязкость жидкости;  $\alpha = 0.000017$  1/град — коэффициент теплового расширения материала трубопровода;  $\Delta t = -40$  град — изменение температуры трубопровода;  $h = 0.0165$  м — толщина стенки трубопровода;  $\delta_0 = 5$  м — амплитуда начального прогиба, скорость перемещения правого конца трубопровода равна нулю.

## 4 Результаты расчетов

Исследование напряженно-деформированного состояния трубопровода для критического значения давления внутри трубопровода, которое находится по формуле [2, 4]:

$$P_{кр} = \frac{1}{F_i(1 - 2\nu)} \left( \frac{4\pi^2 EI}{L^2} - \alpha \Delta t EF + T_{w0} \right) = \frac{1}{1.5109 \cdot (1 - 2 \cdot 0.3)} \times$$

$$\times \left( \frac{4 \cdot 3.1415^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0.017916}{1000^2} - \right.$$

$$\left. - 0.000017 \cdot (-40) \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0.07275 + 35901 \right) = 18.09 \text{ МПа},$$

$$T_{w0} = 897.53 \text{ кН},$$

где  $T_{w0}$  — усилие натяжения в трубопроводе для  $\delta_0 = 5$  м.

На Рис. 1 показаны прогибы трубопровода в различные моменты времени. Видно, что трубопровод при критическом значении давления не перемещается.

На Рис. 2 изображено изменение изгибающего момента в трубопроводе от координаты. Из графика видно, что изгибающие моменты достигают максимума на опорах и в середине трубопровода.

Усилия растяжения в трубопроводе с течением времени и по координате практически не изменяются. Численные расчеты показывают, что при закритическом значении избыточного внутреннего давления в трубопроводе прогиб середины трубопровода с течением времени увеличивается. При критическом значении избыточного внутреннего давления трубопровод остается на месте и при докритическом значении избыточного внутреннего давления максимальный прогиб уменьшается.

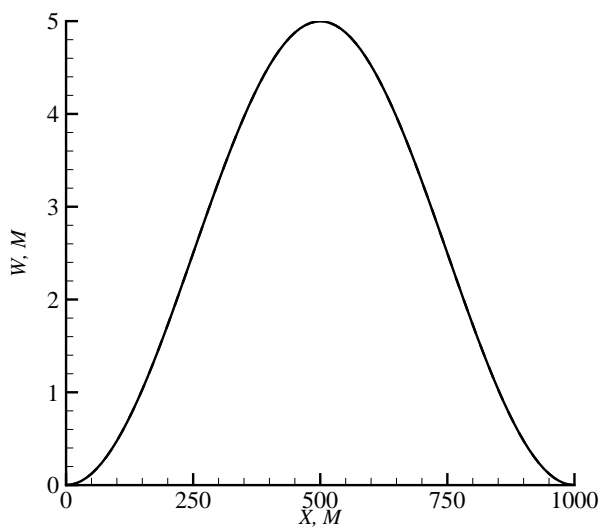


Рис. 1. Зависимость прогиба трубопровода от координаты

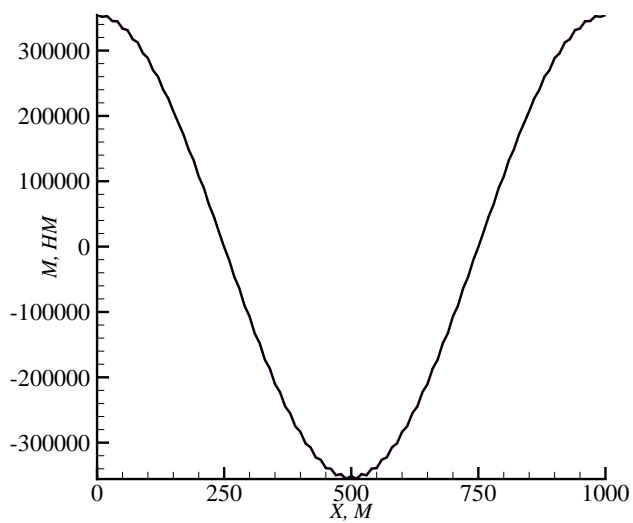


Рис. 2. Зависимость изгибающего момента в трубопроводе от координаты



## 5 Выводы

1. Разработана математическая модель деформации магистрального трубопровода с нулевой кривизной в недеформированном состоянии, проложенного в болотистой местности, учитывающая начальную погрешность монтажа, продольные усилия, внутреннее давление, изменение температуры и влияние надвига земной коры.
2. При закритическом значении избыточного внутреннего давления в трубопроводе прогиб середины трубопровода с течением времени увеличивается. При критическом значении избыточного внутреннего давления трубопровод остается на месте, а при докритическом значении избыточного внутреннего давления максимальный прогиб уменьшается.

## Список литературы

- [1] Казанцев Ю. В., Казанцева Т. Т. Структурная геология юго-востока Восточно-Европейской платформы. Изд-во «Гилем». Уфа, 2001. 234 с.
- [2] Ильгамов М. А. Статические задачи гидроупругости. Казань: ИММ РАН, 1994. 208 с.
- [3] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т.2. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 612 с.
- [4] Шаммазов А. М., Зарипов Р. М., Чичелов В. А., Коробков Г. Е. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. М.: Интер, 2005. 706 с.