УДК 534.113 + 517.984.54

# О двойственности решения задачи отыскания относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки по двум собственным частотам ее осесимметричных колебаний

*А. М. Ахтямов, Г. Ф. Сафина*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Рассматривается обратная задача отыскания относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки, недоступной визуальному осмотру, по двум собственным частотам ее осесимметричных колебаний. Доказывается теорема о двойственности решения этой обратной задачи. Приводятся соответствующие контрпримеры.

**Ключевые слова:** обратная задача, теорема двойственности

## 1 Введение

Математическое содержание проблем колебаний оболочек сводится к рассмотрению линейных однородных дифференциальных уравнений с однородными краевыми условиями. Коэффициенты дифференциальных уравнений являются функцией некоторого параметра, содержащего в себе частоту свободных колебаний. Для определения собственных частот следует определить значение параметра, для которого существует некоторая тождественно не равная нулю функция, удовлетворяющая всем краевым условиям и дифференциальному уравнению. Частоты собственных колебаний выражаются через собственные значения. Подобный подход к отысканию частот свободных колебаний позволил исследовать влияние ряда краевых условий на величины собственных значений [1–7]. Однако, обратное влияние — влияние собственных частот на краевые условия — в этих работах не исследовалось. Целью настоящего исследования является выявление возможности определения упругих закреплений цилиндрических оболочек по собственным частотам их колебаний. Ранее подобная задача для оболочек не ставилась. Подобные задачи рассматривались лишь для струн, мембран, стержней и пластин [8–13].

## 2 Прямая задача

Прежде, чем поставить обратную задачу для задачи о колебаниях цилиндрической оболочки рассмотрим влияние упругости закрепления краев на собственные значения замкнутых круговых ортотропных (каркасированных) цилиндрических оболочек, у которых $R$, $l$, $h$, $D$ — радиус, длина, толщина и цилиндрическая жесткость; $E$, $\rho$ — модуль упругости и плотность материала; $\omega_i$ — частота свободных колебаний $i$-го тона; $w$, $u$ — радиальное и осевое перемещения; $\sigma$, $\tau$, $M$ — нормальное, касательное напряжение и погонный изгибающий момент; $\varepsilon$, $\chi$ — относительная деформация и изменение кривизны; $x$, $\varphi$ — осевая и угловая координаты; $f$, $EI$ — площадь поперечного сечения и изгибная жесткость краевого ребра.

Все величины, характеризующие оболочку в осевом направлении, обозначим индексом «1», в кольцевом направлении — индексом «2», а величины, характеризующие ребра, — индексом «+».

Дифференциальное уравнение задачи и запись краевых условий получим по методу [4], основанному на использовании уравнения Эйлера вариационной задачи

$$\frac{\partial U}{\partial w(x)} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial U}{\partial w'(x)}\right] + \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\partial U}{\partial w''(x)}\right] = 0, \tag{1}$$

и естественных граничных условий смешанной вариационной задачи, например, условий

$$\left.\frac{\partial U}{\partial w'(x)} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial U}{\partial w''(x)}\right] \mp \frac{\partial U_+}{\partial w(x)}\right|_{\substack{x=0\\ x=l}} = 0, \tag{2}$$

отражающих равенство радиальных деформаций оболочки и краевых ребер.

В формулах (1), (2) $U$ — потенциальная энергия длины оболочки; $U_+$ — потенциальная энергия краевых ребер; штрихами отмечено дифференцирование по $x$; знак минус у последнего члена (2) относится к краевому условию в сечении $x = 0$, знак плюс — в сечении $x = l$.

При вычислении потенциальной энергии оболочки и ребер, рассматриваемых как упругие опоры, будем учитывать наиболее весомые в энергетическом отношении силовые факторы. Предполагаем, что выполнены гипотезы Кирхгофа–Лява. Кроме того пренебрегаем энергией сдвига и рассматриваем только осесимметричные колебания. Такой подход позволяет ограничиться рассмотрением на каждом краю оболочки лишь двух граничных условий.

При свободных осесимметричных колебаниях радиальные перемещения оболочки, зависящие только от осевой координаты $x$ и времени $t$, представим в виде

$$w(x,t) = \sum_i y_i(x)\, \sin\omega_i\, t, \tag{3}$$

где $y_i(x)$ — функция осевой координаты, определяющая форму колебания $i$-го тона; далее индекс «$i$» будем опускать.

Деформацию и усилия выражаем через функцию $y(x)$ и ее производные

$$M_1 = -D_1\, w''(x,t); \qquad \chi_1 = -w''(x,t); \tag{4}$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{R}\, w(x,t); \qquad \varepsilon_2 = \frac{w(x,t)}{R}.$$

Потенциальную энергию единицы длины оболочки представим энергией изгиба образующих и энергией сжатия — растяжения поперечных сечений, работу внешних сил — энергией радиальных инерционных массовых нагрузок

$$U = \frac{1}{2} \oint \left[M_1\, \chi_1 + \sigma_2\, h_2\, \varepsilon_2 - q\, w(x,t)\right]\, R\, d\varphi. \tag{5}$$

Потенциальная энергия краевых ребер представляется энергией сжатия–растяжения, работа внешних сил — энергией массовой нагрузки

$$U_+ = \frac{1}{2} \oint \left[\sigma_+\, f\, \varepsilon_+ - q_+\, w(x,t)\right]\, R\, d\varphi. \tag{6}$$

Здесь

$$q = \rho\, h_\Sigma\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}; \qquad q_+ = \rho_+\, f\, \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2},$$

причем $q$ и $q_+$ — погонная массовая нагрузка; $h_\Sigma$ —толщина оболочки с учетом каркаса [4]. Применяя равенство (1) к (5) с учетом(4), получаем дифференциальные уравнения

$$y^{IV}(x) - \lambda^4\, y(x) = 0; \qquad \lambda^4 = \omega^2\, \frac{\rho\, h_\Sigma}{D_1} - \frac{E_2\, h_2}{D_1\, R^2}. \tag{7}$$

Поскольку $\lambda^4 > 0$, то при двух мнимых и двух действительных корнях характеристического уравнения общее решение уравнения (7) можно представить в виде

$$y(x) = C_1\, \mathrm{ch}\, \lambda\, x + C_2\, \cos\lambda\, x + C_3\, \mathrm{sh}\, \lambda\, x + C_4\, \sin\lambda\, x, \tag{8}$$

где $C_i$ — произвольные постоянные, зависящие от краевых условий. Для оболочки, свободно опертой на упругие в своих плоскостях и абсолютно податливые вдоль оси оболочки круговые ребра, имеем

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = 0, \quad w = w_0 \qquad (x = 0);\\ &\sigma_1 = 0, \quad w = w_l \qquad (x = l). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $w_{0,l}$ — радиальные перемещения ребер, в общем случае различные для сечений $x = 0$ и $x = l$. Условия (9) с учетом (2), (3) и (4) устанавливают связи

$$\begin{aligned} &y''(0) = 0; \quad y'''(0) + B_0\, l^{-3}\, y(0) = 0;\\ &y''(l) = 0; \quad y'''(l) - B_l\, l^{-3}\, y(l) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где относительная жесткость ребер равна

$$B = \left(\frac{E\, f\, R}{D_1} + \omega^2\, \frac{f\, \rho_+\, R^3}{D_1}\right)\left(\frac{l}{R}\right)^3.$$

В сечении $x = 0$ имеем $B_0$, $f_0$; в сечении $x = l$ — $B_l$, $f_l$. Зависимости (9) дают систему однородных уравнений

$$\begin{gathered} C_1 - C_2 = 0;\\ C_1\, B_0 + C_2\, B_0 + C_3\, \alpha^3 - C_4\, \alpha^3 = 0;\\ C_1 \operatorname{ch} \alpha - C_2 \cos \alpha + C_3 \operatorname{sh} \alpha - C_4 \sin \alpha = 0;\\ C_1(\alpha^3 \operatorname{sh} \alpha - B_l \operatorname{ch} \alpha) + C_2(\alpha^3 \sin \alpha - B_l \cos \alpha) +\\ + C_3(\alpha^3 \operatorname{ch} \alpha - B_l \operatorname{sh} \alpha) - C_4(\alpha^3 \cos \alpha + B_l \sin \alpha) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь $\alpha = \lambda\, l$ — безразмерный параметр, зависящий от вида решения дифференциального уравнения и краевых условий. Потребовав равенства нулю детерминанта системы (11) (для нахождения нетривиального решения), получим трансцендентное уравнение

$$\begin{gathered} \alpha^6(1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha) + \alpha^3(B_0 + B_l)(\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha) +\\ + 2\, B_0\, B_l \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Решение последнего уравнения при различных значениях относительной жесткости краевых ребер удобно проводить в пакете MAPLE.

Аналогично можно получить трансцендентные уравнения для других краевых условий. Например, в работе [3] приведены виды уравнения (12) при некоторых других краевых условиях. В случаях, когда краевые ребра-опоры отсутствуют ($B = 0$) или являются абсолютно жесткими ($B = \infty$), трансцендентное уравнение переходит в характеристическое уравнение фундаментальных функций поперечных колебаний балок [14].

## 3 Обратная задача. Теорема о двойственности решения

Поставим к прямой спектральной задаче обратную: *по собственным частотам свободных осесимметричных колебаний замкнутых круговых ортотропных цилиндрических оболочек найти упругость закрепления краевых ребер (относительную жесткость).* Итак, дано уравнение

$$y^{IV}(x) = \lambda^4 y(x)$$

с краевыми условиями $U_i(y, \lambda) = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, где формы $U_i(y, \lambda)$ есть

$$U_1(y, \lambda) = y''(0);$$

$$U_2(y, \lambda) = y'''(0) + B_0\, l^{-3}\, y(0);$$
$$U_3(y, \lambda) = y''(l);$$
$$U_4(y, \lambda) = y'''(l) - B_l\, l^{-3}\, y(l).$$

Подставив общее решение уравнения в краевые условия и, приравняв к нулю детерминант образовавшейся системы, получим известное уравнение (12).

Тогда поставленная выше обратная задача в спектральных терминах формулируется следующим образом: неизвестны коэффициенты $B_0$, $B_l$ форм $U_i(y, \lambda)$; известны отличные от нуля собственные значения $\lambda_i$ задачи (7). Требуется восстановить краевые условия, то есть найти относительные жесткости $B_0$, $B_l$ упругих краевых ребер цилиндрической оболочки.

Решим задачу в случае, когда известны первые две собственные частоты колебаний $\omega_i$, а значит соответствующие им значения $\alpha_i$. Подставляя значения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ в уравнение (12) получим систему однородных уравнений

$$\begin{array}{c} f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_1)\, x + f_3(\alpha_1)\, y = 0, \\ f_1(\alpha_2) + f_2(\alpha_2)\, x + f_3(\alpha_2)\, y = 0, \end{array} \tag{13}$$

в которой

$$\begin{array}{c} f_1(\alpha_i) = \alpha_i^6(1 - \mathrm{ch}\ \alpha_i\ \cos\ \alpha_i), \\ f_2(\alpha_i) = \alpha_i^3(\mathrm{sh}\ \alpha_i\ \cos\ \alpha_i - \mathrm{ch}\ \alpha_i\ \sin\ \alpha_i), \\ f_3(\alpha_i) = 2\ \sin\ \alpha_i\ \mathrm{sh}\ \alpha_i, \\ x = B_0 + B_l,\ y = B_0\, B_l,\ i = 1, 2. \end{array} \tag{14}$$

Пусть определитель матрицы системы уравнений (13) отличен от нуля. Тогда по теореме Крамера система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle},\ y = \frac{\triangle_y}{\triangle}, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \triangle_x &= f_1(\alpha_2)\, f_3(\alpha_1) - f_1(\alpha_1)\, f_3(\alpha_2), \\ \triangle_y &= f_1(\alpha_2)\, f_2(\alpha_1) - f_1(\alpha_1)\, f_2(\alpha_2), \\ \triangle &= f_2(\alpha_1)\, f_3(\alpha_2) - f_2(\alpha_2)\, f_3(\alpha_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Полученные значения $x$ и $y$ приводят к следующей системе уравнений

$$B_0 + B_l = x,$$

$$B_0\, B_l = y,$$

из которой по обратной теореме Виета определяются коэффициенты $B_0$, $B_l$:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 - 4\,y}), \\ B_l &= \frac{1}{2}(x \mp \sqrt{x^2 - 4\,y}). \end{aligned} \tag{17}$$

Формулы (17) показывают двойственность получаемых значений $B_0$, $B_l$.

Таким образом, нами доказана теорема о двойственности решения задачи нахождения относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки.

**Теорема (о двойственности решения обратной задачи).** *Если известны две ненулевые собственные частоты $\omega_i$ (соответствующие им значения $\alpha_i$) и, определитель (16) матрицы системы (13) отличен от нуля, то коэффициенты $B_0$, $B_l$ определяются по формулам (17).*

Доказанная теорема дает метод решения обратной спектральной задачи. По-другому, метод, с помощью которого можно судить о величине коэффициента относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки по двум собственным частотам ее осесимметричных колебаний.

# 4 Примеры

Рассмотрим задачу определения краевых условий по двум собственным значениям на конкретных примерах.

*Пример 1.*

Пусть известны два значения $\alpha_i$:

$$\alpha_1 = 1,750140001,$$

$$\alpha_2 = 4,758314548,$$

которые соответствуют первым двум частотам $\omega_i$, определенных частотомером. Необходимо найти относительную жесткость упругих краевых ребер круговой цилиндрической оболочки.

Система уравнений (14) перепишется следующим образом:

$$28,22544402 - 14,11272200\,B_0 - 14,11272200\,B_l + 5,117450902\,B_0\,B_l = 0,$$

$$-12814,44406 + 6407,222052\,B_0 + 6407,222052\,B_l - 115,3894189\,B_0\,B_l = 0.$$

Решение данной системы, найденное пакетом MAPLE, имеет вид:

$$(2,000000005;\ -0,1202021419 \cdot 10^{-7});$$

$$(-0,1202021419 \cdot 10^{-7};\ 2,000000005;).$$

Приближенно можно считать, что $B_0 = 2$, $B_l = 0$ или $B_0 = 0$, $B_l = 2$.

Заметим, что относительная жесткость упругих краевых ребер определена верно. Числа $\alpha_1$ и $\alpha_2$, приведенные выше, совпадают с первыми двумя корнями уравнения (12) при значениях $B_0 = 2$ и $B_l = 0$. Кроме того, полученный результат подтверждает теорему о двойственности решения данной обратной спектральной задачи.

*Пример 2.*

Известны следующие два значения $\alpha_i$: $\alpha_1 = 2,359129208, \alpha_2 = 4,815967718$, соответствующие первым двум частотам $\omega_i$. Система (14) в этом случае имеет решение:

$$(7,999999999;\ 1,000000013);$$

$$(1,000000013;\ 7,999999999).$$

Приближенно можно считать, что $B_0 = 8$, $B_l = 1$ или $B_1 = 1$, $B_l = 8$.

Относительная жесткость упругих краевых ребер определена верно. Рассматриваемые значения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ совпадают с первыми двумя корнями уравнения (12) при значениях $B_0 = 1$ и $B_l = 8$. Решение снова подтверждает доказанную теорему о двойственности.

*Пример 3.*

Пусть значения $\alpha_i$ следующие:$\alpha_1 = 2,535223611$, $\alpha_2 = 7,125036400$. Аналогичные рассуждения приводят к результату:

$$(90000,00423;\ 20,00000001);$$

$$(20,00000001;\ 90000,00423).$$

Видно, что приближенно $B_0 = 90000$, $B_l = 20$ или $B_0 = 20$ и $B_l = 90000$. Значения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ совпадают с первыми двумя корнями уравнения (12) при $B_0 = 20$ и $B_l = 90000$. Теорема о двойственности решения справедлива, и относительная жесткость определена верно.

## 5 Заключение

Многие механические системы содержат в качестве своих элементов круговые цилиндрические оболочки. Определение жесткости закрепления краев оболочек важно для проверки надежности работы технической конструкции. В связи с усталостью материалов и температурных изменений постоянные жесткости закреплений краев оболочек со временем могут менять свои значения. Известно, что о жесткости закрепления краевых ребер цилиндрических оболочек невозможно судить с помощью визуального осмотра. Поэтому для обнаружения ненадежности в системе, связанной с изменением коэффициента жесткости, можно использовать собственные частоты, вызванные постукиванием по оболочке. Численные значения первых двух частот, найденные с помощью частотомера, позволяют по формулам (12)—(17) оценить необходимость замены оболочек в механической системе. Найденные формулы дают способ определения относительной жесткости уже по первым двум собственным частотам осесимметричных колебаний оболочки. В этом и состоит преимущество рассматриваемого метода. Таким образом, полученный результат позволяет правильно определять жесткость закрепления краевых ребер круговой цилиндрической оболочки, не прибегая к процедуре разборки механической системы.

## Список литературы

[1] Агеносов Л. Г., Саченков А. В. Устойчивость и свободные колебания тонких цилиндрических оболочек кругового сечения при разных краевых условиях // Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек». Вып. 2. Изд. Казанск. гос. ун-та, 1964.

[2] Маневич Л. И., Стежко А. В. О влиянии краевых условий на частоты колебаний и критические напряжения цилиндрической оболочки // Прикладная механика. 1968. Т. 4, Вып. 3.

[3] Антоненко Э. В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикладная механика. 1975. Т. 11, Вып. 6.

[4] Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966.

[5] Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.

[6] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.

[7] Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

[8] Ахтямов А. М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. Серия ММ-МИУ. 2001. Т. 5, № 3. С. 103–110.

[9] Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.

[10] Ахтямов А. М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. № 8. С. 1011–1015.

[11] Ахтямов А. М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 3. С. 325–331.

[12] Ахтямов А. М. Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 137–147.

[13] Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. V. 12, №. 4. P. 393–408.

[14] Власов В. З. Избранные труды / Т. 3. М.: Наука, 1964.