УДК 532.546; 533.15

# К вопросу об отыскании параметров упругого закрепления краев прямоугольной пластины

*А. М. Ахтямов,** *А. В. Муфтахов* **

* Институт механики УНЦ РАН,Уфа

** Башкирский государственный университет, Уфа

**Аннотация.** Рассматривается прямоугольная пластина, у которой два противоположных края свободно оперты, а два других поддерживаются упругими балками. В статье доказывается двойственность решения задачи отыскания жесткостей упругих балок по всем собственным частотам колебаний пластины. Показывается также, что если ранг некоторой матрицы равен 9, то оба решения задачи отыскания жесткостей упругих балок можно найти по 9 собственным частотам.

**Ключевые слова:** собственные частоты, прямоугольная пластина, упругое закрепление

## 1 Введение

Прямоугольные пластины находят широкое применение в различных областях техники. Они используются в качестве печатных плат и плат–оснований, плит–перекрытий, обшивок авиационных конструкций и кораблей, деталей различных механических конструкций [1–6]. Если закрепление пластины недоступно для визуального осмотра, то для обнаружения неисправности ее закрепления можно использовать собственные частоты изгибных колебаний. Для круговых и кольцевых пластин методы диагностирования закрепления пластин найдены в работах [7, 8, 9]. В них показано, что вид закрепления круговой или кольцевой пластины по собственным частотам их изгибных колебаний определяется однозначно. Возникает вопрос: можно ли по собственным частотам изгибных колебаний прямоугольной пластины определить вид ее закрепления на двух противоположных краях пластины, если на двух других ее краях реализуется свободное опирание? Поскольку противоположные края пластины равноправны, то пластина с закреплением (заделка—свободный край) прозвучит так же, как и пластина с закреплением (свободный край—заделка). Следовательно, нельзя говорить об однозначности определения закрепления на двух противоположных сторонах прямоугольной пластины по собственным частотам ее изгибных колебаний. Однако, оказывается, можно говорить о двойственности решения этой задачи. Здесь наблюдается аналогия с задачей определения коэффициентов жесткостей пружинок при упругом закреплении струны [10]: коэффициенты жесткостей пружинок находятся по собственным частотам однозначно с точностью до перестановок пружинок местами.

В работе рассмотрен случай прямоугольной пластины, у которой два противоположных края свободно оперты, а два других поддерживаются упругими балками. Одним из основных результатов настоящей работы является теорема 1, в которой показана двойственность решения задачи определения жесткостей упругих балок по всем собственным частотам колебаний пластины. Другим результатом является теорема 2, в которой показано, что если ранг некоторой матрицы равен 9, то оба решения обратной задачи можно найти по 9 собственным частотам. В конце работы приведен пример применения теоремы 2.

## 2 Прямая задача

Перед тем, как сформулировать обратную спектральную задачу, напомним как ставится прямая задача отыскания неизвестных собственных частот по известным краевым условиям.

Если толщина $h$ однородной пластины постоянна (цилиндрическая жесткость $D = \text{const}$), то уравнение свободных колебаний прямоугольной пластины имеет следующий вид (см., например, [3] или [6]):

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Если край $x_1 = a_1$ прямоугольной пластины соединен с поддерживающей его балкой, то прогиб на этом крае будет равен не нулю, а прогибу балки, а поворот края будет равен кручению балки. Пусть $B_1$ — жесткость балки при изгибе, а $B_1^*$ — жесткость ее при кручении. Тогда граничные условия, описывающие общий вид упругого закрепления края пластины $x_1 = a_1$, записываются в виде двух дифференциальных уравнений [2]:

$$B_1 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right)_{x_1=a_1} = D \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]_{x_1=a_1}, \tag{2}$$

$$-B_1^* \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1=a_1} = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)_{x_1=a_1}. \tag{3}$$

Аналогично, если край $x_1 = 0$ прямоугольной пластины соединен с поддерживающей его балкой с жесткостью при изгибе $B_0$ и жесткостью при кручении $B_0^*$, то имеем

$$-B_0 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right)_{x_1=0} = D \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]_{x_1=0}, \tag{4}$$

$$B_0^* \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1=0} = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)_{x_1=0}. \tag{5}$$

Пусть на двух других противоположных сторонах пластины (при $x_2 = 0,\ a_2$) реализуются условия свободного опирания, то краевые условия для края $x_2 = 0$ записываются следующим образом [4]:

$$(w)_{x_2=0} = 0; \qquad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0, \tag{6}$$

$$(w)_{x_2=a_2} = 0; \qquad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a_2} = 0. \tag{7}$$

В этом случае переменные разделяются. Подстановка

$$w = \Phi_m(x_1) \cdot \sin \frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot \cos(\omega t - \chi) \qquad (m = 1, 2, \dots)$$

приводит задачу (1)–(7) к следующей краевой задаче для функции $\Phi_m = \Phi_m(x_1)$:

$$\Phi_m^{IV} - \frac{2m^2\pi^2}{a_2^2} \Phi_m'' + \left( \frac{m^4\pi^4}{a_2^4} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right) \Phi_m = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} U_1(\Phi_m) &= c_1 L_1 \Phi_m(x_1) + L_4 \Phi_m(x_1) = 0, \\ U_2(\Phi_m) &= c_2 L_2 \Phi_m(x_1) + L_3 \Phi_m(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} U_3(\Phi_m) &= -c_3 L_5 \Phi_m(x_1) + L_8 \Phi_m(x_1) = 0, \\ U_4(\Phi_m) &= -c_4 L_6 \Phi_m(x_1) + L_7 \Phi_m(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $c_1 = B_0/D$, $c_2 = B_0^*/D$, $c_3 = B_1/D$, $c_4 = B_1^*/D$, а формы $L_i \Phi_m$ представляются с помощью следующих формул:

$$
\begin{aligned}
L_1\Phi_m &= \left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^4 [\Phi_m(x_1)]_{x_1=0}\,,\\
L_2\Phi_m &= \left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 [\Phi'_m(x_1)]_{x_1=0}\,,\\
L_3\Phi_m &= \left[\Phi''_m(x_1) - \nu\left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 \Phi_m\right]_{x_1=0},\\
L_4\Phi_m &= \left[\Phi'''_m(x_1) - (2-\nu)\left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 \Phi'_m(x_1)\right]_{x_1=0},\\
L_5\Phi_m &= \left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^4 [\Phi_m(x_1)]_{x_1=a_1}\,,\\
L_6\Phi_m &= \left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 [\Phi'_m(x_1)]_{x_1=a_1}\,,\\
L_7\Phi_m &= \left[\Phi''_m(x_1) - \nu\left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 \Phi_m\right]_{x_1=a_1},\\
L_8\Phi_m &= \left[\Phi'''_m(x_1) - (2-\nu)\left(\tfrac{m\pi}{a_2}\right)^2 \Phi'_m(x_1)\right]_{x_1=a_1}.
\end{aligned}
$$

Краевые условия (9)–(10) служат для определения произвольных постоянных, входящих в общее решение

$$\Phi_m(x_1) = C_{1m}\cos\gamma_{1m}x_1 + C_{2m}\sin\gamma_{1m}x_1 + C_{3m}\mathrm{ch}\gamma_{2m}x_1 + C_{4m}\mathrm{sh}\gamma_{2m}x_1, \quad (11)$$

где

$$\gamma_{1m} = \left[\left(\frac{\rho h\omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m^2\pi^2}{a_2^2}\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad \gamma_{2m} = \left[\left(\frac{\rho h\omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m^2\pi^2}{a_2^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\Phi_{ml}(x_1)$ $(l = 1, 2, 3, 4)$ следующие линейные независимые решения уравнения (8):

$$
\begin{gathered}
\Phi_{m1}(x_1) = \cos\gamma_{1m}x_1, \quad \Phi_{m2}(x_1) = \sin\gamma_{1m}x_1,\\
\Phi_{m3}(x_1) = \mathrm{ch}\gamma_{2m}x_1, \quad \Phi_{m4}(x_1) = \mathrm{sh}\gamma_{2m}x_1.
\end{gathered} \quad (12)
$$

Для определения констант $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ используют краевые условия $U_i(\Phi_m) = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$. Уравнение частот получают из условия существования ненулевого решения для $C_i$. Ненулевое решение для $C_i$ существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель [6]

$$\Delta_m(\omega_{mk}) = \begin{vmatrix} U_1(\Phi_{m1}) & U_1(\Phi_{m2}) & U_1(\Phi_{m3}) & U_1(\Phi_{m4})\\ U_2(\Phi_{m1}) & U_2(\Phi_{m2}) & U_2(\Phi_{m3}) & U_2(\Phi_{m4})\\ U_3(\Phi_{m1}) & U_3(\Phi_{m2}) & U_3(\Phi_{m3}) & U_3(\Phi_{m4})\\ U_4(\Phi_{m1}) & U_4(\Phi_{m2}) & U_4(\Phi_{m3}) & U_4(\Phi_{m4}) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Задача нахождения собственных значений по известным краевым условиям хорошо изучена (см. [5]). Нас же интересует обратная задача — найти краевые условия задачи по известным собственным значениям. Более точно эта постановка сформулирована в следующем пункте статьи.

# 3 Постановка обратной задачи

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $c_{ij}$ форм $U_1(\Phi_m)$, $U_2(\Phi_m)$, $U_3(\Phi_m)$ и $U_4(\Phi_m)$, через $C$:

$$C = \left\| \begin{array}{cccccccc} c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & 1 & 0 \end{array} \right\|. \tag{14}$$

Обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты $c_{ij}$ задачи (8), (16) — неизвестны; известны собственные значения $\omega_{mk}$ задачи (8), (16). Требуется найти коэффициенты $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$.

# 4 Двойственность решения обратной задачи

Покажем двойственность решения поставленной выше обратной задачи.

Элементы матрицы $C$ обозначим через $c_{ij}$, а миноры матрицы $C$ — через

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = \left| \begin{array}{cccc} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{array} \right|. \tag{15}$$

Краевые условия (9)–(10) в этих обозначениях могут быть переписаны в виде:

$$U_i(\Phi_m) = \sum_{j=1}^{8} c_{ij} L_j \Phi_m \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{16}$$

Наряду с формами (16) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\widetilde{U}_i(\Phi_m) = \sum_{j=1}^{8} \widetilde{c}_{ij} L_j \Phi_m \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{17}$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $\widetilde{c}_{ij}$, через $\widetilde{C}$, а ее миноры — через $\widetilde{M}_{k_1k_2k_3k_4}$.

**Теорема 1 (о двойственности решения обратной задачи).** *Если собственные значения $\{\omega_{mk}\}$ задач (8), (16) и $\{\widetilde{\omega}_{mk}\}$ задачи (8), (17) совпадают с учетом их кратностей, то*

$$c_1 = \widetilde{c}_1, \quad c_2 = \widetilde{c}_2, \quad c_3 = \widetilde{c}_3, \quad c_4 = \widetilde{c}_4$$

*или*

$$c_1 = \widetilde{c_3}, \quad c_2 = \widetilde{c_4}, \quad c_3 = \widetilde{c_1}, \quad c_4 = \widetilde{c_2}.$$

**Доказательство.** Заметим, что определитель (13) можно представить в следующей форме:

$$\Delta_m(\omega_{mk}) = \det(CD_m),$$

где

$$D_m = \left\| \begin{array}{cccc} L_1\Phi_{m1} & L_1\Phi_{m2} & L_1\Phi_{m3} & L_1\Phi_{m4} \\ L_2\Phi_{m1} & L_2\Phi_{m2} & L_2\Phi_{m3} & L_2\Phi_{m4} \\ L_3\Phi_{m1} & L_3\Phi_{m2} & L_3\Phi_{m3} & L_3\Phi_{m4} \\ L_4\Phi_{m1} & L_4\Phi_{m2} & L_4\Phi_{m3} & L_4\Phi_{m4} \\ L_5\Phi_{m1} & L_5\Phi_{m2} & L_5\Phi_{m3} & L_5\Phi_{m4} \\ L_6\Phi_{m1} & L_6\Phi_{m2} & L_6\Phi_{m3} & L_6\Phi_{m4} \\ L_7\Phi_{m1} & L_7\Phi_{m2} & L_7\Phi_{m3} & L_7\Phi_{m4} \\ L_8\Phi_{m1} & L_8\Phi_{m2} & L_8\Phi_{m3} & L_8\Phi_{m4} \end{array} \right\|.$$

Используя формулу Бине–Коши [11], получаем:

$$\Delta_m(\omega_{mk}) = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_8\le 8} M_{k_1k_2k_3k_4} f_{mk_1k_2k_3k_4}, \tag{18}$$

где $f_{mk_1k_2k_3k_4}$ — миноры четвертого порядка матрицы $D_m$.

Поскольку

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = 0 \qquad \text{при} \quad k_3, k_4 \le 4, \quad k_1, k_2 \ge 5, \tag{19}$$

то, применяя теорему Лапласа для вычисления определителей и учитывая, что $\Delta_m(\omega_{mk}) = 0$, получаем:

$$\sum_{\substack{1 \le k_1 < k_2 \le 4 \\ 5 \le k_3 < k_4 \le 8}} M_{k_1k_2k_3k_4} f_{mk_1k_2k_3k_4}(\omega_{mk}) = 0. \tag{20}$$

Из свойств общей теории для линейных дифференциальных операторов следует, что при фиксированном $m$ функция $\Delta_m(\omega_m)$ является целой функцией порядка 1/2 (см. [12]) .

Отсюда следует, что характеристические определители $\Delta_m(\omega_m)$ и $\widetilde{\Delta}_m(\omega_m)$ задач (8), (16) и (8), (17) соответственно связаны соотношением

$$\Delta_m(\omega_m) \equiv K\widetilde{\Delta}(\omega_m) \tag{21}$$

где $k$ — некоторое целое неотрицательное число, а $K$ — некоторая отличная от нуля константа.

Из (18) и (21) следует, что

$$\sum_{\substack{1\le k_1<k_2\le 4\\ 5\le k_3<k_4\le 8}} (M_{k_1k_2k_3k_4} - K\widetilde{M}_{k_1k_2k_3k_4}) f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_m) \equiv 0,$$

где

$$f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_m) = D_m \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в последнее тождество соответствующие шестнадцать функций $f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_m)$, получаем:

$$\begin{gathered}
\Big[(M_{1257} - M_{1356}) - K(\widetilde{M}_{1257} - \widetilde{M}_{1356})\Big] f_{1257} + \\
+\Big[(M_{1268} - M_{2456}) - K(\widetilde{M}_{1268} - \widetilde{M}_{2456})\Big] f_{1268} + \\
+\Big[(M_{1368} + M_{2457}) - K(\widetilde{M}_{1368} + \widetilde{M}_{2457})\Big] f_{1368} + \\
+\Big[(M_{1278} + M_{3456}) - K(\widetilde{M}_{1278} + \widetilde{M}_{3456})\Big] f_{1278} + \\
+\Big[(M_{1378} - M_{3457}) - K(\widetilde{M}_{1378} - \widetilde{M}_{3457})\Big] f_{1378} + \\
+\Big[(M_{2478} - M_{3468}) - K(\widetilde{M}_{2478} - \widetilde{M}_{3468})\Big] f_{2478} + \\
+\Big[M_{1357} - K\widetilde{M}_{1357}\Big] f_{1357} + \Big[M_{2468} - K\widetilde{M}_{2468}\Big] f_{2468} + \\
+\Big[M_{1256} - K\widetilde{M}_{1256}\Big] f_{1256} + +\Big[M_{3478} - K\widetilde{M}_{3478}\Big] f_{3478} \equiv 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Нетрудно показать, что верны следующие равенства $f_{1257} = -f_{1356}$, $f_{1268} = -f_{2456}$, $f_{1278} = f_{3456}$, $f_{1368} = f_{2457}$, $f_{1378} = -f_{3457}$, $f_{2478} = -f_{3468}$, а функции $f_{1256}(\omega_m)$, $f_{1257}(\omega_m)$, $f_{1268}(\omega_m)$, $f_{1278}(\omega_m)$, $f_{1357}(\omega_m)$, $f_{1368}(\omega_m)$, $f_{1378}(\omega_m)$, $f_{2468}(\omega_m)$, $f_{2478}(\omega_m)$, $f_{3478}(\omega_m)$ образуют линейно независимую систему функций (это проверено авторами с помощью пакета аналитических вычислений Maple. Все функции $f_{k_1k_2k_3k_4}(\omega_m)$ мы не выписываем лишь ввиду их громоздкости. Они представляют комбинации от тригонометрических и гиперболических функций $\cos\cdot$, $\sin\cdot$, $\mathrm{ch}\,\cdot$, $\mathrm{sh}\,\cdot$ и их аргументов).

Значит справедливы следующие равенства:

$$M_{1256} = K\widetilde{M}_{1256}, \tag{23}$$

$$M_{1357} = K\widetilde{M}_{1357}, \tag{24}$$

$$M_{2468} = K\widetilde{M}_{2468}, \tag{25}$$

$$M_{3478} = K\widetilde{M}_{3478}, \tag{26}$$

$$M_{1257} - M_{1356} = K(\widetilde{M}_{1356} - \widetilde{M}_{1257}), \tag{27}$$

$$M_{1268} - M_{2456} = K(\widetilde{M}_{1268} - \widetilde{M}_{2456}), \tag{28}$$

$$M_{1378} - M_{3457} = K(\widetilde{M}_{1378} - \widetilde{M}_{3457}), \tag{29}$$

$$M_{2478} - M_{3468} = K(\widetilde{M}_{2478} - \widetilde{M}_{3468}), \tag{30}$$

$$M_{1278} + M_{3456} = K(\widetilde{M}_{1278} + \widetilde{M}_{3456}), \tag{31}$$

$$M_{1368} + M_{2457} = K\,(\widetilde{M}_{1368} + \widetilde{M}_{2457}). \tag{32}$$

Матрица $\widetilde{C}$ имеет вид

$$\widetilde{C} = \begin{Vmatrix} \widetilde{c}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{c}_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\widetilde{c}_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\widetilde{c}_4 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{33}$$

Из этого представления для матриц (14), (33) и равенства (25) следует, что $K = 1$.

Из (24), (28) вытекает, что

$$c_1 c_3 = \widetilde{c}_1 \widetilde{c}_3, \quad c_1 + c_3 = \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_3,$$

откуда по теореме Виета получаем следующие равенства

$$c_1 = \widetilde{c}_1, \quad c_3 = \widetilde{c}_3 \quad \text{или} \quad c_1 = \widetilde{c}_3, \quad c_3 = \widetilde{c}_1. \tag{34}$$

Аналогично из (24), (29) вытекает, что

$$c_2 = \widetilde{c}_2, \quad c_4 = \widetilde{c}_4 \quad \text{или} \quad c_2 = \widetilde{c}_4, \quad c_4 = \widetilde{c}_2. \tag{35}$$

Таким образом, получается 4 возможных случая:
1) $c_1 = \widetilde{c}_1, \quad c_3 = \widetilde{c}_3, \quad c_2 = \widetilde{c}_2, \quad c_4 = \widetilde{c}_4;$
2) $c_1 = \widetilde{c}_3, \quad c_3 = \widetilde{c}_1, \quad c_2 = \widetilde{c}_4, \quad c_4 = \widetilde{c}_2;$
3) $c_1 = \widetilde{c}_1, \quad c_3 = \widetilde{c}_3, \quad c_2 = \widetilde{c}_4, \quad c_4 = \widetilde{c}_2;$
4) $c_1 = \widetilde{c}_3, \quad c_3 = \widetilde{c}_1, \quad c_2 = \widetilde{c}_2, \quad c_4 = \widetilde{c}_4.$

Однако случаи 3) и 4) являются частными случаями 1) и 2). Действительно, пусть реализуется случай 3), тогда из (31) или (32) вытекает равенство

$$(c_1 - c_3)(c_2 - c_4) = 0. \tag{36}$$

Отсюда, $c_1 - c_3 = 0$ или $c_2 - c_4 = 0$. Равенство $c_1 - c_3 = 0$ приводит случай 3) к случаю 2), так как $\widetilde{c}_1 = c_1 = c_3 = \widetilde{c}_3$ и, следовательно, $\widetilde{c}_1 = c_3$, $\widetilde{c}_3 = c_1$. Равенство $c_2 - c_4 = 0$ приводит случай 3) к случаю 1), так как $\widetilde{c}_4 = c_2 = c_4 = \widetilde{c}_2$ и, следовательно, $\widetilde{c}_2 = c_2$, $\widetilde{c}_4 = c_4$. По сравнению с (31) или (32), остальные равенства (23)–(30) не приносят новых ограничений. Таким образом, в случае 3) выполняется 1) или 2). В случае 4), как и в случае 3), из (31) или (32) вытекает равенство (36). Равенство $c_1 - c_3 = 0$ приводит случай 4) к случаю 1), а равенство $c_2 - c_4 = 0$ приводит случай 4) к случаю 2). Что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Из теоремы 1 следует, что в случае $c_1 = c_3$, $c_2 = c_4$ у решения задачи определения краевых условий закрепления пластины по собственным частотам будет не два, а одно решение. Это возможно, например, в случае закрепления (свободный край–свободный край).

# 5 Метод распознавания краевых условий

Пусть $\{\omega_{mk}\}$ — собственные частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины на двух противоположных краях которой реализуется свободное опирание. В этом случае $\{\omega_{mk}\}$ — отличные от нуля собственные значения задачи (8), (16) и, поэтому, согласно (21), (22), удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{gathered}\Delta_m(\omega_{mk}) = (M_{1257} - M_{1356})f_{1257}(\omega_{mk}) + \\ +(M_{1268} - M_{2456})f_{1268}(\omega_{mk}) + \\ +(M_{1368} + M_{2457})f_{1368}(\omega_{mk}) + (M_{1278} + M_{3456})f_{1278}(\omega_{mk}) + \\ +(M_{1378} - M_{3457})f_{1378}(\omega_{mk}) + (M_{2478} - M_{3468})f_{2478}(\omega_{mk}) + \\ +M_{1357}f_{1357}(\omega_{mk}) + M_{2468}f_{2468}(\omega_{mk}) + \\ +M_{1256}f_{1256}(\omega_{mk}) + M_{3478}f_{3478}(\omega_{mk}) = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

где $f_{mk_1k_2k_3k_4}$ — миноры четвертого порядка матрицы $D_m$, а миноры $M_{k_1k_2k_3k_4}$ определены равенствами (15).

Если $\omega_{mk}$ — лишь девять собственных частот из всего спектра задачи (8), (16), то равенства (37) образуют систему 9-ти линейных алгебраических уравнений относительно 10-ти неизвестных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$:

$$\begin{gathered}\Delta_m(\omega_{mk}) = x_1 f_{1257}(\omega_{mk}) + x_2 f_{1268}(\omega_{mk}) + \\ +x_3 f_{1368}(\omega_{mk}) + x_4 f_{1278}(\omega_{mk}) + \\ +x_5 f_{1378}(\omega_{mk}) + x_6 f_{2478}(\omega_{mk}) + \\ +x_7 f_{1357}(\omega_{mk}) + x_8 f_{2468}(\omega_{mk}) + \\ +x_9 f_{1256}(\omega_{mk}) + x_{10} f_{3478}(\omega_{mk}) = 0,\end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\begin{gathered}x_1 = M_{1257} - M_{1356}, \quad x_2 = M_{1268} - M_{2456}, \\ x_3 = M_{1368} + M_{2457}, \quad x_4 = M_{1278} + M_{3456}, \\ x_5 = M_{1378} - M_{3457}, \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468}, \\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \quad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478}.\end{gathered} \tag{39}$$

Если $\mathrm{rank}\|\mathrm{f_{mk_1k_2k_3k_4}}(\omega_{\mathrm{mk}})\|_{10\times 9} = 9$, то система линейных алгебраических уравнений (38) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. По найденным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$

неизвестные $c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ могут быть найдены из системы (39). В общем случае, как следует из доказательства теоремы 1, имеется два решения системы (39).

Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 2 (о двойственности решения обратной задачи).** *Пусть 9 собственных частот $\omega_{mk}$ из спектра задачи (8)–(10) таковы, что*

$$\mathrm{rank}\|\mathrm{f}_{\mathrm{mk_1k_2k_3k_4}}(\omega_{\mathrm{mk}})\|_{10\times 9} = 9.$$

*Тогда решение задачи отыскания неизвестных коэффициентов $c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ краевых условий по этим 9 собственным частотам двойственно.*

**Замечание.** Теорема 2 сильнее теоремы 1, поскольку в теореме 2 для восстановления краевых условий используются только 9 собственных частот, а не все собственные частоты как в теореме 1. Однако область применения теоремы 1 шире, поскольку ранг системы не всегда может быть равен 9. Ниже приведен пример 2, который показывает, что использование только 9 собственных частот гарантирует двойственность решения, а использование всех собственных частот позволяет доказать единственность.

# 6 Численный эксперимент

**Пример.** Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $\nu = 1/3$, $m = 1$ и известны 9 собственных частот $\omega_{1k}$ задачи (8)–(10). Они таковы что $\lambda_k = \left(\frac{\rho h \omega_{1k}^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 9)$ равны

$$\lambda_1 = 15.9575693189425; \quad \lambda_2 = 29.6973991015566; \quad \lambda_3 = 48.7587791433343;$$

$$\lambda_4 = 72.8154627823456; \quad \lambda_5 = 101.902700974420; \quad \lambda_6 = 136.112068104105;$$

$$\lambda_7 = 175.521047657731; \quad \lambda_8 = 220.185093694234; \quad \lambda_9 = 270.140464069729.$$

С помощью пакета Maple получаем $\mathrm{rank}\|\mathrm{f}_{\mathrm{1k_1k_2k_3k_4}}(\omega_{\mathrm{1k}})\|_{10\times 9} = 9$ и решение системы

$$x_1 = -18.0000003986897C; \quad x_2 = 32.0000003872623C;$$

$$x_3 = 10.0000500689354C; \quad x_4 = -13.9999004742381C;$$

$$x_5 = -4.00000032133589C; \quad x_6 = 6.00000000210091C,$$

$$x_7 = -3.00001852763884C; \quad x_8 = -8.00000000843112C;$$

$$x_9 = 23.9999950967584C; \quad x_{10} = C;$$

Поскольку матрица $C$ имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

то

$$\begin{gathered} x_1 = -c_1\,c_2\,c_3 - c_1\,c_3\,c_4 = -18, \quad x_2 = c_1\,c_2\,c_4 + c_2\,c_3\,c_4 = 32, \\ x_3 = c_1\,c_4 + c_2\,c_3 = 10, \quad x_4 = -c_1\,c_2 - c_3\,c_4 = -14, \\ x_5 = -c_1 - c_3 = -4, \quad x_6 = c_2 + c_4 = 6, \\ x_7 = -c_1\,c_3 = -3, \quad x_8 = -c_2\,c_4 = -8, \quad x_9 = c_1\,c_2\,c_3\,c_4 = 24. \end{gathered} \tag{40}$$

Откуда получаем, что

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = 4,$$

или

$$c_1 = 3, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 2$$

Таким образом, в полном соответствии с теоремами двойственности, получаем два решения. Они соответствуют упругому закреплению на противоположных краях. Одно из решений означает, что один из краев пластины закреплен упругой балкой с относительной жесткостью 1 при изгибе и относительной жесткостью 2 при кручении, а противоположный край закреплен балкой с относительной жесткостью 3 при изгибе и относительной жесткостью 4 при кручении. Второе решение соответствует закреплению с переставленными балками. Отметим, что найденные условия закрепления определены верно. Значения $\lambda_k = \left(\frac{\rho h \omega_{1k}^2}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 9)$ были выбраны так, что они с точностью до пятнадцати значащих цифр совпадают с собственными значениями, соответствующими упругому именно такому упругому закреплению.

# 7 Заключение

В работе рассмотрен случай прямоугольной пластины, у которой два противоположных края свободно оперты, а два других поддерживаются упругими балками. Одним из основных результатов настоящей работы является теорема 1, в которой показана двойственность решения задачи определения жесткостей упругих балок по всем собственным частотам колебаний пластины. Доказано, что жесткости упругих балок, которыми крепятся два противоположных края пластины восстанавливаются с точностью до перестановок балок местами. Другим результатом является теорема 2, в которой показано, что если ранг некоторой матрицы равен 9, то оба решения задачи отыскания жесткостей упругих балок можно найти по 9 собственным частотам. В конце работы приведен численный эксперимент, подтверждающий теоретические выводы теорем 1 и 2.

## Список литературы


[1] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

[2] Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. М., Л.: ОГИЗ. 1948. 460 с.

[3] Strutt W. (Lord Rayleigh) The theory of sound. Volume 1. London: Macmillan and co. limited. 1926. = Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Том 1. М., Л.: Гостехиздат. 1940. 500 с.

[4] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.

[5] Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964.

[6] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. 352 с.

[7] Ахтямов А. М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 3. С. 325–331.

[8] Ахтямов А. М. Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 137–147.

[9] Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Problems in Science and Engineering. 2004. V. 12, №. 4. P. 393–408.

[10] Ахтямов А. М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. № 8. С. 1011–1015.

[11] Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука. 1982. 272 с. / Lankaster P. Theory of matrices. New York–London: Academic Press, 1969.

[12] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

[13] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.