УДК 532.546

Влияние сил Стокса и Архимеда на устойчивость двухфазного потока

Б. Х. Хужаёров, Э. А. Чулиев

Академия наук Узбекистана, Самарканд

Аннотация. Рассмотрена задача об устойчивости двухфазного потока. решение уравнений устойчивости выполнено спектральным методом с использованием полиномов Чебышева. Установлено уменьшение области устойчивости потока газа при добавлении частиц твердой фазы. Проведен анализ влияния на характеристику устойчивости сил Стокса и Архимеда.

Ключевые слова: устойчивость, нейтральная устойчивость, двухфазный поток, сила Стокса, сила Архимеда

Исходная система уравнений для газовзвеси [1, 2], если пренебречь в ней фазовыми переходами и эффектами сжимаемости, но с учетом силы Стокса и Архимеда, имеет вид:

– уравнения и неразрывности для газа:

$$\begin{gathered}(1-\alpha)\rho_1\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right)=\\ =-(1-\alpha)\vec{\nabla}p+\frac{9}{2}\alpha\frac{\mu}{\alpha^2}(\vec{u}-\vec{v})-\alpha\rho_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\mu\vec{\nabla}^2\vec{v};\end{gathered}\tag{1}$$

$$\frac{\partial(1-\alpha)}{\partial t}+\vec{\nabla}(1-\alpha)\vec{v}=0;\tag{2}$$

– уравнения движения и неразрывности для дисперсной фазы:

$$\alpha\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u}\right)=-\alpha\vec{\nabla}p+\frac{9}{2}\alpha\frac{\mu}{\alpha^2}(\vec{v}-\vec{u})+\alpha\rho_1\frac{\partial\vec{v}}{\partial t};\tag{3}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\alpha\vec{u}=0,\tag{4}$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2)$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ — векторы скорости для чистого газа и частиц, p — давление, α — объемная концентрация частиц в дисперсной фазе, ρ_1 — плотность чистого газа, ρ_2 — плотность материала частиц, t – время.

В отличие от других моделей, например [3, 4], модель [1, 2] является наиболее полной и учитывает одновременно силы Стокса и Архимеда, градиент давления для частиц и др.

Вопросы устойчивости потоков газовзвесей исследовались в работах [5, 6] и др. В данной работе на основе уравнений многофазного течения [1, 2] исследуется устойчивость двухфазного потока газовзвеси в плоском канале.

Для исследования устойчивости, решение системы (1)–(4) представим в виде суперпозиции основного ламинарного течения со скоростями $U(y)$, $V(y)$, давлением P, постоянной объемной концентрацией α_0 и малого возмущения:

$$\begin{aligned} &\vec{\nu} = V(y)i_1 + \vec{\nu}'(x,y,t), \quad && \vec{u} = U(y)i_1 + \vec{u}'(x,y,t), \\ &p = P(y) + p'(x,y,t), && \alpha(x,y,t) = \alpha_0 + \alpha_0'(x,y,t). \end{aligned} \tag{5}$$

где i_1 — единичный вектор по направлению x, $\vec{\nu}'$, $\vec{u}'$, p',α' — скорости газа и частиц, давление и объемная концентрация частиц для возмущающего потока, соответственно. Основное течение представляется решением уравнений Навье-Стокса для двухфазного потока. При этом предполагается, что скорости и давление возмущающего течения малы по сравнению со скоростями и давлением основного течения, так что всеми квадратичными членами возмущающего течения можно пренебречь по сравнению с линейными членами [7, 8]. Стационарные скорости для газа $V(y)$ и частиц $U(y)$ считаются равными, так как их разность для плоскопараллельных течений мала.

Составляющие возмущения представим в виде:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}' \\ \vec{u}' \\ p' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_0'(y) \\ \vec{u}_0'(y) \\ p_0'(y) \\ \alpha_0'(y) \end{bmatrix} e^{i(kx-wi)}. \tag{6}$$

Величина w — комплексная и может быть представлена в виде $w = w_r + iw_i$, где w_r есть круговая частота отдельного колебания, а w_i — коэффициент нарастания, т.е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. В (6) $\vec{v'}_0(y) = (v_{10}', v_{20}')$, $\vec{u'}_0(y) = (u_{10}', u_{20}')$.

Подставляя (5), (6) в (1)–(4) и пренебрегая членами второго порядка малости относительно возмущений получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными, из которых можно получить два уравнения с двумя неизвестными. Для этого введем две функции тока $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$, т.е. положим

$$-v'_{10} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v'_{20} = ik\psi, \quad -u'_{10} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad u'_{20} = ik\varphi.$$

В результате получаем два уравнения устойчивости:

$$D^2\psi - ikRe\left(U - \lambda - \frac{if}{k\tau}\right)D\psi + ikRe\frac{d^2U}{dy^2}\psi + \frac{f}{S}D\varphi + \frac{f}{S_1}ikRe\lambda D\psi = 0; \quad (7)$$

$$D\psi - ik\tau\left(U - \lambda - \frac{i}{k\tau}\right)D\varphi + ik\tau\frac{d^2U}{dy^2}\varphi - \frac{\tau}{S_1}ikD\psi = 0, \quad (8)$$

где для течения Пуазейля в плоском канале $U(y) = 1 - y^2$, $-1 \leq y \leq 1$, $D = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2$, k — волновое число; $\lambda = \frac{\omega}{k}$, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, λ_r — фазовая скорость; λ_i — коэффициент нарастания частиц в газовзвеси, возмущение задается в виде $\exp(i(kx + \omega t))$ с определенной амплитудой; $\tau = S \cdot Re$, $S = \frac{2}{9}\left(\frac{\alpha}{L}\right)^2 \frac{S_2}{S_1}$, $S_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Граничные условия для возмущений в потоке Пуазейля для (7), (8) имеют вид:

$$\psi(\pm 1) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(\pm 1) = 0, \quad (9)$$

$$\varphi(\pm 1) = 0. \quad (10)$$

Равенства (9) являются обычными требованиями непроницаемости и прилипания для чистого газа, а (10) — условием непроницаемости для твердых частиц.

Уравнения (7), (8) и граничные условия (9), (10) обладают свойством инвариантности относительно замены y на $-y$, поэтому решение можно искать отдельно для четных и нечетных функций ψ и φ.

Как известно, для решения уравнений типа уравнений Орра-Зоммерфельда применяются различные численные методы: асимптотические методы, методы ортогонализации, дифференциальной прогонки и др. Здесь был использован спектральный метод, который позволяет найти весь

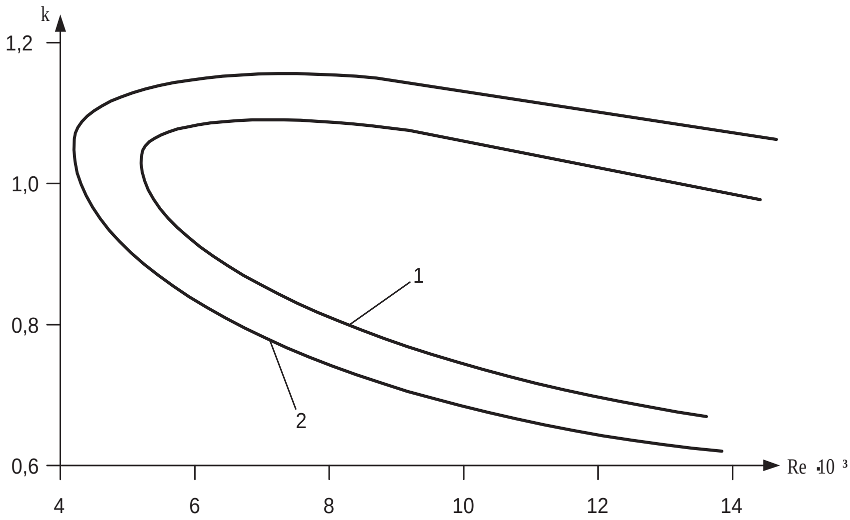

Рис. 1: Кривые нейтральной устойчивости для чистого газа (1), и модели [1, 2] (2) при $f = 0.05$, $\tau = 1$

спектр собственных значений и имеет более высокую точность, чем другие численные методы. В качестве базисных функций здесь использованы полиномы Чебышева. Приближенное решение задачи (7)–(10) будем искать в виде:

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(y), \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(y), \tag{11}$$

где $T_n(y)$ — полиномы Чебышева первого рода, a_n, b_n, $n = \overline{1, N}$ — коэффициенты.

Подставляя выражения (11) в (7)–(10) и приравнивая члены при одинаковых полиномах $T_n(y)$, получим алгебраическую систему уравнений относительно коэффициентов a_n и b_n. Для полученной однородной системы алгебраических уравнений задача на собственные значения решена спектрально-сеточным методом.

На Рис. 1 в плоскости (k, Re), где $Re = \rho_1 v L/\mu$, L — характерная длина, μ – вязкость жидкости, приведены кривые нейтральной устойчивости ($\lambda_i = 0$) для одного варианта изменения параметров задачи. Значение параметра f фиксировано: $f = 0.05$. Из Рис. 1 видно, что кривая 2 лежит слева от кривой 1. Это означает уменьшение области устойчивости течения при добавлении в поток частиц, характеризуемых сравнительно небольшими временами релаксации. Отметим, что указанный результат согласуется с выводами, приведенными [4], где предсказывалось уменьшение критического числа Рейнольдса при $\tau \to 0$ (случай мелких частиц). Однако, интересным является тот факт, что при использовании модели [1, 2] с учетом силы Стокса и Архимеда эти выводы оказываются верными не только для $\tau \to 0$, но и вплоть до значений параметра $\tau \approx 6$. Установлено, что существует определенный интервал времени релаксации, когда поток наиболее устойчив. Влияние силы Архимеда обнаружено только при больших значениях времени релаксации частиц.

Список литературы

[1] Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 184-195.

[2] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1–2. М.: Наука, 1987.

[3] Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas // J.Fluid Mech. 1962. V. 13, Pt. 1. P. 120–128.

[4] Drew D. A. Stability of a Stokes layer of a dusty gas // Phys.Fluids. 1979. V. 22, № 11. P. 2081–2086.

[5] Желтухин И. Д. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемом газе, несущем твердую примесь // Изв.АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 2. С. 103–110.

[6] Воинов О. В., Петров А. Г. Устойчивость относительного движения фаз в течениях двухфазных сред // Журн.прикл.механики и техн.физики. 1982. № 1. С. 83–90.

[7] Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.

[8] Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Иностр. лит., 1958. 195 с.