



УДК 532.5,532.516

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАЦИИ НА ДИНАМИКУ ПУЗЫРЬКОВОГО КЛАСТЕРА¹

Э. Ш. Насибуллаева

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Метод суперсжатия, состоящий в непериодическом изменении внешнего давления, применяется к кластеру газовых пузырьков, находящегося в безграничной вязкой слабосжимаемой жидкости. Рассматривается влияние диссипации кинетической энергии, связанной с вязкостью жидкости и акустическим излучением, на динамику пузырькового кластера. Проводится сравнение колебаний одиночного пузырька и пузырька в монодисперсном кластере, а также сравнение колебаний пузырьков в моно- и полидисперсном кластерах.

Ключевые слова: вязкая слабосжимаемая жидкость, пузырьковый кластер, метод суперсжатия, диссипация, акустическое поле

1 Введение

При излучении в жидкость интенсивной звуковой волны с амплитудой звукового давления, превосходящей некоторую пороговую величину, возникают кавитационные пузырьки. Эти пузырьки группируются, образуя кавитационные области сложной и изменчивой формы, называемые кавитационными облаками или кластерами. Во время схлопывания пузырьки создают кратковременные импульсы давления, способные разрушить даже прочные материалы. Схлопывание сопровождается также нагревом газа до больших температур, что может привести к свечению пузырьков при кавитации (сонолюминесценция).

Динамике кавитационных облаков посвящен ряд работ (например, см. [1, 2]). Однако из-за довольно сложного поведения и взаимодей-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97912)

ствия пузырьков в облаках, проводимые экспериментальные и теоретические исследования в данной области пока не дают полного понимания проблем, сопровождающих кавитацию, и явления сонолюминесценции. Гораздо полнее исследована динамика одиночного пузырька. Поэтому представляет интерес провести сравнения поведения одиночного пузырька и пузырька в кластере при одних и тех же условиях.

В работах [3–5] была предложена модель пузырькового кластера и представлены некоторые результаты, полученные с помощью численных расчетов на основе данной модели. В частности было показано, что при периодическом воздействии внешнего давления минимальный радиус пузырьков в кластере больше минимального радиуса одиночного пузырька. Однако, поскольку для свечения пузырьков необходимы более сильные сжатия, интересно нахождение таких условий, при которых пузырьки в скоплениях сжимались бы сильнее.

В данной статье к кластеру применяется метод суперсжатия, который был предложен для одиночного газового пузырька в работе [6]. Этот метод, называемый также «баскетбольным» режимом заключается в следующем. Во время сжатия пузырька давление в жидкости берется максимальным для того, чтобы усилить сжатие жидкостью газового пузырька. Это давление поддерживается до максимального сжатия пузырька, после чего он начинает расширяться из-за пересжатия. В это время давление в жидкости меняется на минимальное, чтобы помочь жидкости ускориться, благодаря расширению пузырька. Это давление в жидкости поддерживается до окончания расширения пузырька. После чего процесс повторяется.

В данной работе проводится сравнение характера колебаний одиночного пузырька, представленного в работе [6], и пузырьков в кластере при «баскетбольном» режиме. Кроме того исследуется влияние диссипации, обусловленной вязкостью жидкости и акустическим излучением, на характер колебания пузырька в кластере. На основе конкретных примеров приведено также сравнение для случаев моно- и полидисперсного кластера.

2 Монодисперсный кластер

Рассматривается множество газовых пузырьков одного радиуса, сосредоточенных в конечном объеме безграничной слабосжимаемой вязкой жидкости. Если кластер рассматривать как каплю, содержащую жидкость и микропузырьки, то система обыкновенных дифференциальных

уравнений, описывающая сферически-симметричные колебания условной границы кластера и границы пузырька в акустическом поле, имеет вид [3–5]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_c - p_\infty}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C_l} \frac{d}{dt} [p_c - p_\infty], \quad (1)$$

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{p_a - p_c}{\rho_l}, \quad (2)$$

$$Na^2\dot{a} = R^2\dot{R}, \quad (3)$$

$$p_a = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} - \frac{4\mu\dot{a}}{a} - \frac{2\sigma}{a}. \quad (4)$$

Здесь $R = R(t)$ — радиус кластера, $p_c = p_c(t)$ — давление жидкости внутри кластера, p_∞ — давление жидкости на бесконечности, ρ_l — плотность жидкости, C_l — скорость звука в жидкости, $a = a(t)$ — радиус пузырька, p_a — давление жидкости у стенки пузырька, N — число пузырьков, p_0 — начальное давление жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения, a_0 — начальный радиус пузырька, μ — вязкость жидкости, γ — показатель адиабаты.

2.1 Решение без учета диссипации

Для того, чтобы провести сравнения с одиночным пузырьком исключим из рассматриваемой системы все механизмы диссипации (в нашем случае — вязкость и акустическое излучение). Тогда система уравнений (1)–(4) примет вид:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_c - p_\infty}{\rho_l}, \quad (5)$$

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{(p_0 + 2\sigma/a_0) (a/a_0)^{-3\gamma} - 2\sigma/a - p_c}{\rho_l}, \quad (6)$$

$$Na^2\dot{a} = R^2\dot{R}. \quad (7)$$

Давление в жидкости на бесконечности задается как

$$p_\infty = \begin{cases} p_0, & \dot{R} > 0 \quad (\dot{a} < 0) \\ p_0 + \Delta P, & \dot{R} < 0 \quad (\dot{a} > 0) \end{cases}, \quad (8)$$

где ΔP — величина изменения давления.

Исследуем систему уравнений (5)–(7). Левые части в (5), (6) выразим следующим образом:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{2R^2} \frac{d}{dR} (R^3 \dot{R}^2), \quad (9)$$

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{2a^2} \frac{d}{da} (a^3 \dot{a}^2). \quad (10)$$

Уравнение (7) преобразуем в

$$R^2 dR = Na^2 da.$$

С учетом последнего равенства можно перейти к дифференцированию только по переменной a :

$$\frac{d}{dR} = \frac{d}{da} \frac{da}{dR} = \frac{R^2}{Na^2} \frac{d}{da}.$$

Отсюда следует, что выражение (9) можно записать как

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{2a^2} \frac{d}{da} \left(\frac{R^3 \dot{R}^2}{N} \right). \quad (11)$$

При сложении уравнений (5), (6), с учетом (10) и (11) получаем:

$$\frac{1}{2a^2} \frac{d}{da} (a^3 \dot{a}^2) + \frac{1}{2a^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^3 \dot{R}^2}{N} \right) = \frac{\tilde{p}_a - p_\infty}{\rho_l},$$

где

$$\tilde{p}_a = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{a}.$$

Поскольку с учетом (7) имеем:

$$\frac{R^3 \dot{R}^2}{N} = \frac{Na}{R} a^3 \dot{a}^2,$$

то в итоге придем к следующему уравнению:

$$\frac{d}{da} \left[\left(1 + \frac{Na}{R(a)} \right) a^3 \dot{a}^2 \right] = 2a^2 \frac{\tilde{p}_a - p_\infty}{\rho_l}. \quad (12)$$

Для одиночного пузырька аналогичное уравнение имеет вид [6]:

$$\frac{d}{da} (a^3 \dot{a}^2) = 2a^2 \frac{\tilde{p}_a - p_\infty}{\rho_l}. \quad (13)$$

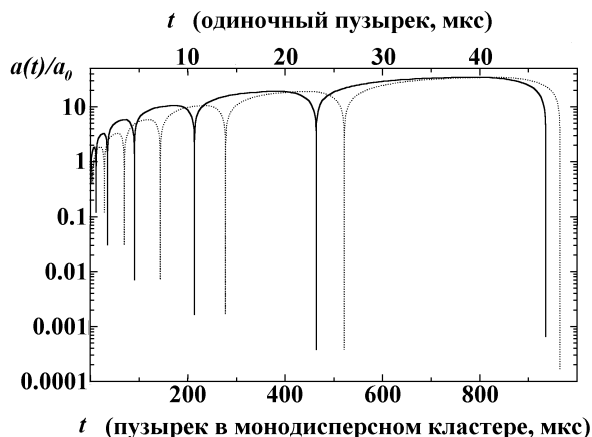


Рис. 1: Колебания одиночного пузырька (штриховая линия) и пузырька в монодисперсном кластере (сплошная линия) с $a_0 = 5$ мкм при неперiodическом воздействии внешнего давления без учета диссипации

Общее решение уравнения (12) при $p_\infty = const$:

$$\frac{3}{2} \left(1 + \frac{Na}{R(a)} \right) a^3 \dot{a}^3 + \frac{(p_0 + 2\sigma/a_0) a_0^{3\gamma}}{(\gamma - 1) \rho_l} a^{-3(\gamma-1)} + \frac{3\sigma a^2}{\rho_l} + \frac{p_\infty a^3}{\rho_l} = const. \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое можно интерпретировать как кинетическую энергию жидкости вокруг пузырька, второе и третье слагаемое — внутренняя энергия газа в пузырьке и последнее слагаемое — потенциальная энергия внешнего поля. Уравнение сохранения энергии (14) отличается от аналогичного уравнения для одиночного пузырька только кинетической энергией, поскольку в нашем случае кинетическая энергия всей системы есть сумма кинетической энергии всех пузырьков в кластере и самого кластера. В этом случае без учета диссипации кинетической энергии значения минимальных и максимальных размеров пузырька в кластере и одиночного пузырька (когда $\dot{a} = 0$) совпадают. Однако имеются различия в периоде колебаний за счет множителя $(1 + Na/R)$, который может быть достаточно большим. Все это проиллюстрировано на Рис. 1, где приведено сравнение характера колебаний одиночного пузырька и пузырька в кластере начального радиуса $a_0 = 5$ мкм под действием внешнего давления, заданного формулой (8).

Значения физических параметров, которые использовались при расчетах следующие: $\rho_l = 10^3$ кг/м³, $C_l = 1500$ м/с, $p_0 = 10^5$ Па, $\sigma = 0.073$ Н/м, $\gamma = 1.4$. Здесь и далее вычисления проводились для кластера

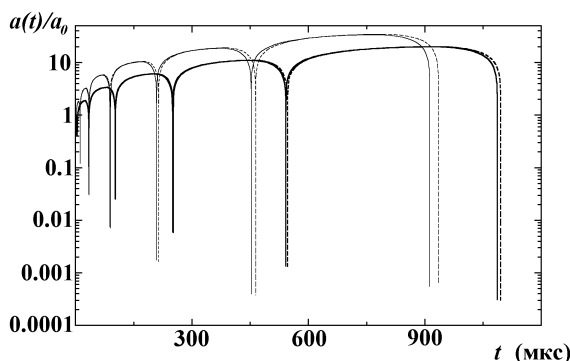


Рис. 2: Колебания пузырьков в двух монодисперсных кластерах с $a_0 = 5$ мкм (тонкая линия) и $a_0 = 10$ мкм (толстая линия) с учетом вязкости (сплошная линия) и без учета вязкости (штриховая линия) при неперiodическом воздействии внешнего давления

с $R_0 = 10^{-3}$ м, содержащего $N = 10^4$ пузырьков при $\Delta P = 10^5$ Па.

Итак, аналитическое и численное решение показало, что при «баскетбольном» режиме характеры колебания одиночного пузырька и пузырька в монодисперсном кластере без учета диссипации одинаковы. Различие имеет место только в периоде колебаний.

2.2 Численное решение с учетом диссипации

В данном разделе рассмотрим влияние диссипации на характер колебаний пузырька в монодисперсном кластере при «баскетбольном» режиме.

Во-первых, учтем вязкость в нашей задаче. Тогда давление на стенке пузырька будет выражаться формулой (4). На Рис. 2 приведено сравнение колебаний пузырьков в двух монодисперсных кластерах с $a_0 = 5$ мкм (тонкая линия) и $a_0 = 10$ мкм (толстая линия), с учетом вязкости (в расчетах бралось $\mu = 10^{-3}$ Па·с) и без учета вязкости. Видно, что влияние вязкости на характер колебания пузырьков незначительно.

Во-вторых, учтем акустическое излучение от кластера в окружающую жидкость. На Рис. 3 приведено сравнение характера колебаний пузырьков в монодисперсном кластере с $a_0 = 5$ мкм под действием внешнего давления,

а) заданного формулой (8);

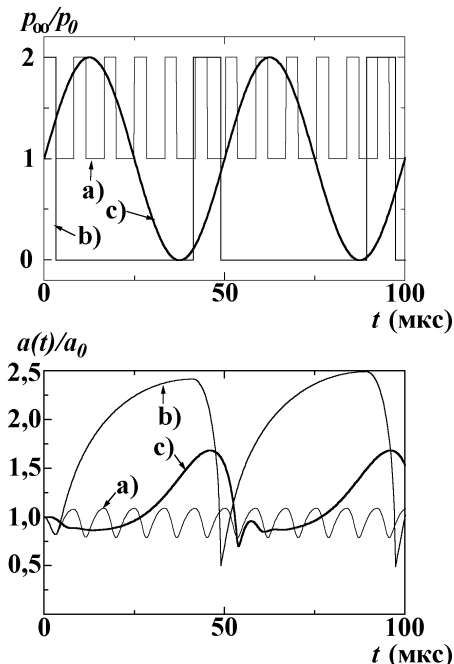


Рис. 3: Внешнее давление и соответствующие ему колебания пузырька в монодисперсном кластере с учетом вязкости и акустического излучения

b) заданного формулой

$$p_{\infty} = \begin{cases} p_0 - \Delta P, & \dot{R} > 0 \quad (\dot{a} < 0) \\ p_0 + \Delta P, & \dot{R} < 0 \quad (\dot{a} > 0) \end{cases}; \quad (15)$$

c) изменяющегося по периодическому закону, то есть

$$p_{\infty} = p_0 - \Delta P \sin(\omega t)$$

(в расчетах бралось $\omega = 20$ кГц, так как это значение циклической частоты наиболее часто используется в расчетах и экспериментах по сонолюминесценции).

Из Рис. 3 видно, что наилучший результат (более сильное сжатие) дает внешнее давление, заданное по формуле (15), тогда как давление, заданное по формуле (8) дает наихудший результат. Это происходит из-за того, что в случае b) при расширении действует давление меньше, чем в остальных случаях, что и дает возможность пузырьку больше расширяться, а это приводит к последующему более глубокому коллапсу.

Следует заметить, что это происходит до некоторого порогового значения ΔP . При превышении данного порога пузырек только расширяется.

Интересно, что учет акустического излучения приводит к исчезновению эффекта раскачки колебаний, когда с каждым периодом максимальное значение радиуса пузырька растет, а минимальный радиус уменьшается. Колебания пузырька в кластере становятся периодически. Таким образом, диссипация, вызванная акустическим излучением, имеет тот же порядок, что и величина приращения кинетической энергии, которая и являлась причиной раскачки колебаний.

3 Полидисперсный кластер

В данном разделе рассмотрим кластер с пузырьками конечного числа различных начальных радиусов (n — фракционный кластер). Полная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поведение пузырьков в кластере и самого кластера имеет следующий вид:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_c - p_\infty}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C_l} \frac{d}{dt} [p_c - p_\infty], \quad (16)$$

$$a_i \ddot{a}_i + \frac{3}{2} \dot{a}_i^2 = \frac{p_{ai} - p_c}{\rho_l}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i a_i^2 \dot{a}_i = R^2 \dot{R}, \quad (18)$$

$$p_{ai} = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}} \right) \left(\frac{a_i}{a_{0i}} \right)^{-3\gamma} - \frac{4\mu \dot{a}_i}{a_i} - \frac{2\sigma}{a_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

$$p_\infty = \begin{cases} p_0, & \dot{R} > 0 \\ p_0 + \Delta P, & \dot{R} < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

где $a_i = a_i(t)$ — радиус пузырька i -той фракции, p_{ai} — давление жидкости у стенки пузырька i -той фракции, N_i — число пузырьков в i -той фракции, a_{0i} — начальный радиус пузырька i -той фракции.

3.1 Численное решение без акустического излучения

Ограничимся случаем двухфракционного кластера ($n = 2$) с числом пузырьков во фракциях $N_1 = N_2 = N/2$. На Рис. 4 изображены характеры колебания пузырьков в двухфракционном кластере с учетом вязкости, но в отсутствие акустического излучения.

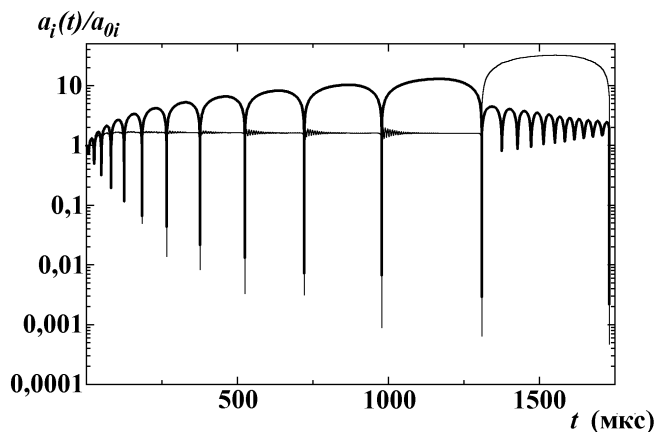


Рис. 4: Колебания пузырьков в двухфракционном кластере ($a_{01} = 5$ мкм — тонкая линия, $a_{02} = 10$ мкм — толстая линия) в отсутствии акустического излучения

Сравнение колебаний в моно- и полидисперсном кластерах показало, что пузырьки различных радиусов в полидисперсном кластере достигают своего минимального радиуса в один и тот же момент времени, тогда как в двух монодисперсных кластерах они достигают своего минимального размера в разные моменты времени (см. Рис. 2). Кроме того период колебаний становится меньше. Таким образом, если мы поместим пузырьки в один кластер, то их характер колебания существенно изменится. Заметим, что до некоторого времени пузырьки во второй фракции (большого радиуса) во время расширения не дают пузырькам первой фракции (с маленьким радиусом) расти, после чего пузырьки в разных фракциях меняются ролями.

3.2 Численное решение с учетом акустического излучения

Учет акустического излучения, как и в случае монодисперсного кластера, меняет характер колебания пузырьков в двухфракционном кластере. На Рис. 5 приведены сравнения трех случаев внешнего давления, заданных, как в случаях а) — с), из пп.2.2. Здесь сплошная линия — для $a_{01} = 5$ мкм, штриховая — для $a_{02} = 10$ мкм.

Как видно из Рис. 5 характер изменения при учете акустического

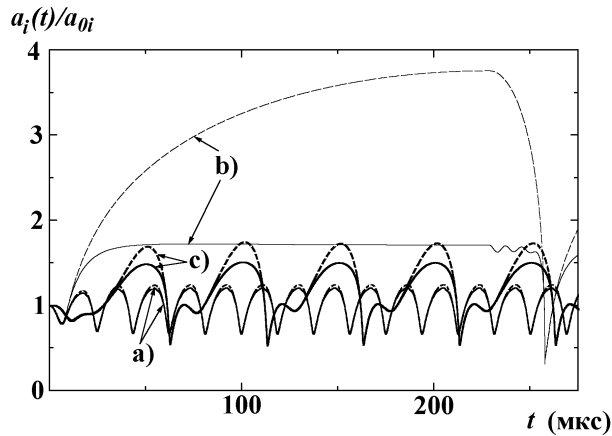


Рис. 5: Колебания пузырьков в двухфракционном кластере ($a_{01} = 5$ мкм — сплошная линия, $a_{02} = 10$ мкм — штриховая линия) при различных внешних давлениях с учетом акустического излучения

излучения в случае полидисперсного кластера также, как и в случае монодисперсного кластера, становятся периодическими. Причем наиболее сильный коллапс наблюдается опять в случае б). Интересно, что при данном давлении маленькие пузырьки «подчиняются» большим и во время основного роста последних радиус маленьких пузырьков остается постоянным. В случае же а) характеры колебаний пузырьков в обеих фракциях мало отличаются друг от друга, а при периодическом изменении давления отличие становится больше, но не столь существенно, как в случае б).

Заключение

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы. Без учета акустического излучения происходит «раскачка» колебаний пузырька, то есть с каждым разом увеличивается амплитуда колебаний, что приводит к последующему более глубокому коллапсу. Причем в случае монодисперсного кластера характеры колебания пузырьков такие же, как и для одиночного пузырька. Кроме того в полидисперсном кластере наблюдается синхронизация фаз коллапса, при которой на колебания пузырьков одной фракции влияют пузырьки другой фракции.

Учет акустического излучения приводит к исчезновению эффекта

«раскачки» колебаний пузырьков в кластере, так как диссипация кинетической энергии, связанная с акустическим излучением, оказывается того же порядка, что и приращение кинетической энергии, приводившей к раскачке колебаний.

Сравнение колебаний при различных внешних давлениях показало, что до некоторого «порогового» значения амплитуды внешнего давления наилучший результат имеет место при внешнем давлении, заданном формулой (15). После «порогового» значения лучше использовать периодическое изменение внешнего давления.

Список литературы

- [1] Chahine G. L., Duraiswami R. Dynamical interaction in a Multi-Bubble Cloud // *Trans. ASME J. Fluids Eng.* 1992. V. 114, № 4. P. 680–686.
- [2] Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa Sh. Dynamics of a Cluster of Bubbles in a Liquid (Theoretical Analysis) // *JSME Int. J., Ser. B.* 1994. V. 37, № 2. P. 297–305.
- [3] Нигматулин Р. И., Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К., Насибуллаева Э. Ш. Динамика пузырьковых кластеров // *Вестник БГУ.* 1999. № 2. С. 12–15.
- [4] Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Vakhitova N. K., Nasibullayeva E. Sh. Dynamics of bubble clusters // *Proc. 15th Int. Symp. on Nonlinear Acoust., Germany, Göttingen.* 1999. P. 455–458.
- [5] Nigmatulin R. I., Akhatov I. Sh., Vakhitova N. K., Bolotnova R. Kh., Topolnikov A. S., Nasibullayeva E. Sh., Kalyakina O. L., Zakirov K. R. Mathematical modeling of a single bubble and multibubble dynamics in a liquid // *Proc. Int. Conf. on Multiphase Systems. Ufa.* 2000. P. 294–301.
- [6] Nigmatulin R. I., Shagapov V. Sh., Vakhitova N. K., Lahey R. T., Jr. A method for superhigh compression-induced temperatures in a gas bubble using non-periodic resonance liquid pressure forcing // *Chem. Eng. Comm.* 1996. V. 152–153. P. 17–39.