



УДК 533.516+517.958:532.5

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ С ТЕМПЕРАТУРНОЙ АНОМАЛИЕЙ ВЯЗКОСТИ¹

В. Н. Киреев, С. Ф. Урманчиев

Институт механики УНЦ РАН, Башкирский государственный университет, Уфа

Аннотация. Для подавляющего большинства жидкостей вязкость является функцией монотонно убывающей с ростом температуры. Однако ряд веществ, в которых в определенном диапазоне температур могут происходить процессы полимеризации и деполимеризации, имеют вязкость с немонотонной температурной зависимостью. Такая зависимость, например, характерна для жидкой серы. В данной работе представлены результаты численного исследования особенностей течения жидкости с некоторой модельной немонотонной зависимостью вязкости от температуры. Установлено образование «вязкого барьера», определяющего характер течения жидкости в канале. Выявлены основные закономерности потока в зависимости от параметров вязкой аномалии и внешних условий.

Ключевые слова: аномально-вязкая жидкость, вязкий барьер, численное моделирование, метод контрольного объема, алгоритм SIMPLE

1 Введение

Динамические характеристики течения жидкостей обусловлены их физическими свойствами и внешними условиями. Обычно параметры, определяющие физические свойства среды полагают постоянными и большинство задач гидродинамики решены в этом предположении. Между тем неоднородное распределение физических свойств способно оказать существенное влияние на закономерности течения жидкости. Основной величиной, определяющей характер течения, является вязкость, которая у ряда жидкостей может претерпевать значительные из-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97907)

менения в зависимости от температуры, что присуще жидким металлам и полимерам. При этом некоторые жидкие среды могут иметь немонотонную зависимость вязкости от температуры. Эта особенность связана с образованием длинных полимерных цепочек при увеличении температуры в определенном диапазоне и их разрушением при дальнейшем повышении температуры. Так, например, вязкость жидкой серы резко увеличивается при температурах свыше 157°C и достигает пикового значения при 187°C [1]. Далее, вплоть до температуры начала испарения, вязкость относительно плавно уменьшается, образуя пикообразную зависимость вязкости от температуры. Впервые особенности течения жидкой серы были отмечены в работах авторов этой статьи [2, 3].

Рассмотрим течение некоторой модельной жидкости с переменной вязкостью, отражающей равновесную зависимость процессов полимеризации-деполимеризации от температуры. Для медленных течений пренебрежем релаксационными процессами в жидкости и будем считать вязкость однозначной функцией температуры.

2 Математическая модель

Для построения математической модели, адекватной физическому процессу, воспользуемся инвариантной формой записи уравнений, определяющих движение несжимаемой жидкости в эйлеровых переменных:

$$\nabla_k v^k = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv^l}{dt} = -\nabla^l p + \nabla_k \tau^{lk}, \quad (2)$$

где v^l — контравариантные компоненты вектора скорости, $\rho = \text{const}$ — плотность жидкости, p — давление, ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования, $\nabla^l = g^{lm} \nabla_m$, g^{lm} — контравариантные компоненты фундаментального тензора, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^k \nabla_k$ — оператор полной производной.

Для компонент тензора вязких напряжений будем считать справедливым закон Ньютона:

$$\tau^{lk} = 2\mu(T)e^{lk}, \quad (3)$$

где $\mu(T)$ — коэффициент динамической вязкости, зависящей от температуры T , e^{lk} — контравариантные компоненты тензора скоростей деформаций, причем

$$e^{lk} = \frac{1}{2} (\nabla^k v^l + \nabla^l v^k). \quad (4)$$

Соответственно, поле температур опишем при помощи уравнения сохранения энергии в форме притока тепла, полагая теплоемкость c жидкости постоянной величиной и считая, что нагрев за счет вязкой диссипации незначителен:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla_k \lambda \nabla^k T, \quad (5)$$

где λ — коэффициент теплопроводности среды.

Введем декартову систему координат и на основе уравнений (1), (2), (5) с учетом замыкающих соотношений (3) и (4) представим математическую модель течения рассматриваемой несжимаемой среды в плоском канале в соответствии с расчетной схемой:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u^2 - \nu(T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[uv - \nu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu'(T) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[uv - \nu(T) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v^2 - \nu(T) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu'(T) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[uT - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[vT - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0, \quad (9)$$

где $\nu(T) = \mu(T)/\rho$ — кинематическая вязкость, $\nu'(T) = \partial\nu/\partial T$ — производная кинематической вязкости по температуре, $\kappa = \lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности. Математическая модель выписана в предположении малости влияния теплового расширения жидкости ($\rho = const$).

Поиск решения системы уравнений (6)–(9) осуществим при следующих граничных условиях:

– на входе

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad p|_{x=0} = p_{in}, \quad T|_{x=0} = T_0, \quad (10)$$

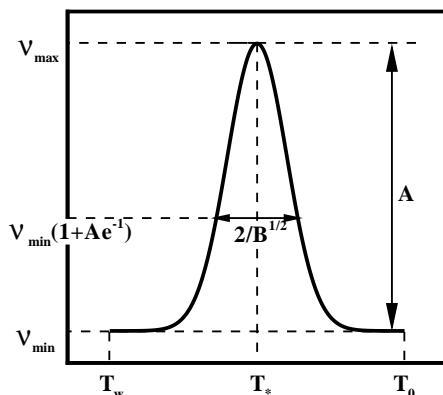


Рис. 1: Зависимость вязкости модельной жидкости от температуры

– на выходе

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad p|_{x=L} = p_{out}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (11)$$

– на стенках канала

$$u|_{y=0} = u|_{y=H} = 0, \quad v|_{y=0} = v|_{y=H} = 0, \quad T|_{y=0} = T|_{y=H} = T_w. \quad (12)$$

Конкретизируем зависимость $\nu(T)$, представив ее формулой

$$\nu(T) = \nu_{min}(1 + A \exp(-B(T - T_*)^2)), \quad (13)$$

где

$$A = \frac{\nu_{max}}{\nu_{min}} - 1, \quad T_* = \frac{T_0 + T_w}{2} \quad (14)$$

Характерный вид зависимости (13) графически показан на Рис. 1

Обозначим отношение H/L через ε и введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{H}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad (15)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{T} = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu - \nu_{min}}{\nu_{max} - \nu_{min}}, \quad (16)$$

где L — длина канала, H — ширина канала, t_0 — характерное время, u_0 и v_0 — характерные скорости, p_0 — характерное давление, T_0 и T_w — температуры жидкости на входе и на стенках канала (считаем, что $T_0 > T_w$)

т. е. рассматривается охлаждаемый канал), ν_{min} и ν_{max} — минимальная и максимальная кинематическая вязкость жидкости в диапазоне температур $[T_0, T_w]$ соответственно.

Между выбранными характерными параметрами имеют место следующие соотношения:

$$t_0 = \frac{L}{u_0} = \frac{H}{v_0}, \quad v_0 = \varepsilon u_0, \quad p_0 = \rho u_0^2. \quad (17)$$

В качестве характерной скорости выберем максимальную скорость u_0 течения жидкости в плоском канале с постоянной вязкостью ν_0 при заданном перепаде давления Δp :

$$u_0 = \frac{H^2}{8\rho\nu_0 L} \Delta p. \quad (18)$$

Таким образом, уравнения математической модели в безразмерном виде после соответствующих преобразований исходных уравнений, могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u^2 - \frac{\varepsilon}{Re} (1 + A\nu(T)) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[uv - \frac{1}{\varepsilon Re} (1 + A\nu(T)) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{Re} A\nu'(T) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[uv - \frac{\varepsilon}{Re} (1 + A\nu(T)) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[v^2 - \frac{1}{\varepsilon Re} (1 + A\nu(T)) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon Re} A\nu'(T) \left[\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[uT - \frac{\varepsilon}{Pe} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[vT - \frac{1}{\varepsilon Pe} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = 0, \quad (22)$$

где безразмерные числа Рейнольдса Re и Пекле Pe определены следующим образом:

$$Re = \frac{H u_0}{\nu_{min}}, \quad Pe = \frac{H u_0}{\kappa}. \quad (23)$$

Заметим, что в приведенной записи специальные обозначения для безразмерных величин отсутствуют, и безразмерная кинематическая вязкость $\nu(T)$ изменяется от 0 до 1.

Безразмерные граничные условия:

$$y = 0, \quad y = 1: \quad u = v = 0, \quad T = 0 \quad (24)$$

$$x = 0: \quad p = 1, \quad T = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

$$x = 1: \quad p = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

Безразмерные начальные условия:

$$t = 0: \quad u = v = 0, \quad T = 0, \quad p = \frac{\Delta p}{p_0}(1 - x) \quad (27)$$

Система уравнений решалась численно с использованием метода контрольного объема с использованием модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости на его основе алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation — полунявный метод для связывающих давление уравнений) [4].

Идея метода контрольного объема поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объемов, в каждом из которых выбирается узловая точка. Затем дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение зависимой переменной между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения зависимой переменной в нескольких узловых точках.

Необходимо отметить, что если дифференциальное уравнение по определению выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема, то дискретный аналог, полученный с помощью метода контрольного объема, выражает закон сохранения для конечного контрольного объема.

Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

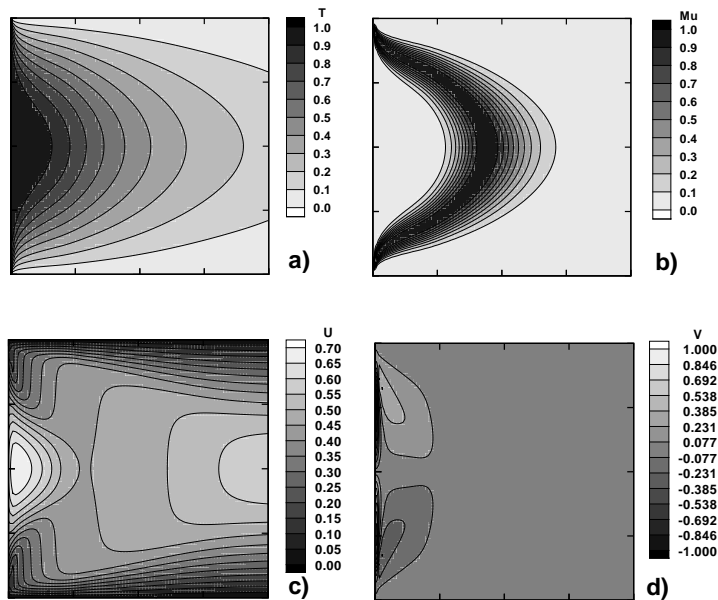


Рис. 2: Распределения температуры (а), вязкости (b), продольной (с) и поперечной (d) составляющих скорости в канале

3 Обсуждение результатов исследования

В соответствии с математической моделью исследуемого процесса, представленной системой уравнений (19)–(22), граничными условиями (24)–(26) и начальными условиями (27) была рассмотрена задача о втекании нагретой жидкости с некоторыми модельными характеристиками зависимости вязкости от температуры в плоский канал с охлаждаемыми стенками. При этом предполагалось, что интенсивность теплообмена на стенках канала достаточно велика, что позволяло использовать граничные условия равенства температуры жидкости в пристеночной области температуре стенок. Разность температур жидкости на входе в канал, с одной стороны, и стенок канала — с другой, охватывала весь диапазон температур, в котором происходило изменение вязкости жидкости.

Расчеты, приведенные на Рис. 2 и Рис. 3, проводились при следующих значениях безразмерных параметров:

$$A = 99, \quad B = 0.01, \quad \varepsilon = 0.01$$

и перепаде давления $\Delta p = 0.8$ Па.

На Рис. 2 представлены распределения значений полей температур

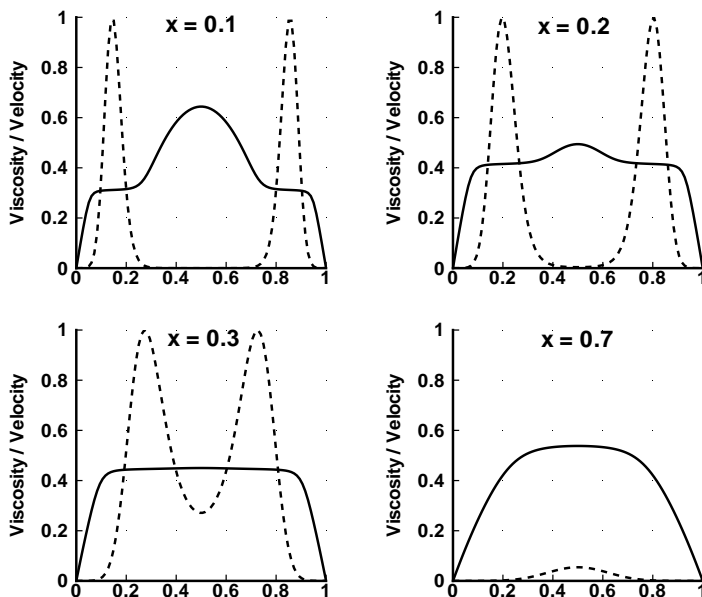


Рис. 3: Профили вязкости (пунктирная линия) и продольной скорости (сплошная линия) для различных сечений канала

(a), вязкости (b), продольной компоненты скорости (c) и поперечной компоненты скорости (d) в безразмерном виде. Канал, в котором рассматривается течение жидкости с приведенными значениями длины и ширины, представлен в виде квадрата. Основные безразмерные параметры течения при этом были равны: $Re = 100$, $Pe = 1000$.

Поле температур (Рис. 2 (a)) имеет распределение, характерное для задач конвективной теплопроводности, что связано с постоянством значений теплоемкости и теплопроводности. Значения вязкости жидкости (Рис. 2 (b)), следуя за характером распределения температурного поля, образуют выпуклую в направлении потока зону немонотонного изменения этого физического параметра — «вязкий барьер». Таким образом, процесс течения определяется характером преодоления жидкостью «вязкого барьера», т. е. устойчивого образования, локализованного в пространстве. В данном расчете перепад давлений был подобран таким образом, чтобы «вязкий барьер» целиком уместился в пределах канала.

Поле значений продольной скорости (Рис. 2 (c)) характеризуется наличием зоны с относительно высокой скоростью. Ее расположение во внутренней части «вязкого барьера» свидетельствует о его потокооткло-

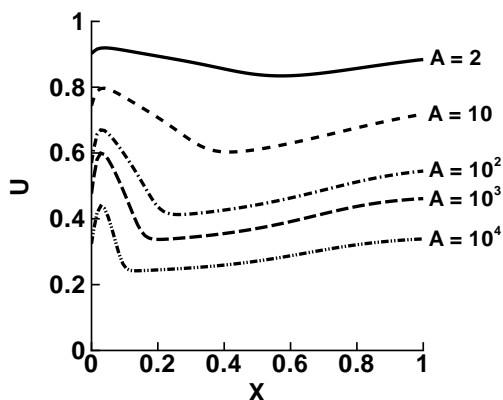


Рис. 4: Распределение значений продольной скорости вдоль оси канала для различных значений параметра A

няющих свойствах. Учитывая реальные размеры области с соотношением ширины к длине как $1/100$, можно говорить об образовании некоторого подобия кумулятивной струи. Эту мысль подтверждает и наличие во внутренней области «вязкого барьера» поперечной составляющей поля скоростей (Рис. 2 (d)). Для наглядности распределения продольной скорости и вязкости по сечению в различных точках по длине канала представлены на Рис. 3. Видно, что вне зоны «вязкого барьера» профиль продольной скорости постепенно становится близким к пуазейлевому.

Распределение значений продольной скорости, давления и температуры по осевой линии вдоль канала для различных величин амплитудного значения вязкости A приведены на Рис. 4–6.

Интересным представляется тот факт, что разность между максимальным значением продольной скорости и ее минимальным значением достигает наибольшей величины при $A = 100$ и сохраняется до $A = 1000$ (Рис. 4). При дальнейшем росте амплитудного значения вязкости эта разность уменьшается в связи со значительным уменьшением общего расхода. В то же время при небольших значениях A влияние аномалии вязкости незначительно. Об этом свидетельствует и Рис. 5, где падение давления при $A = 2$ не отличается от прямой, соответствующей пуазейлевскому течению. Характерные особенности течения начинают приобретать значимость с величин амплитуды $A = 10$.

Несмотря на отсутствие влияния температуры на теплоемкость и теплопроводность рассматриваемой модельной жидкости, распределение температуры по оси канала зависит от амплитуды вязкости (Рис. 5). Это связано с уменьшением расхода жидкости с увеличением аномалии

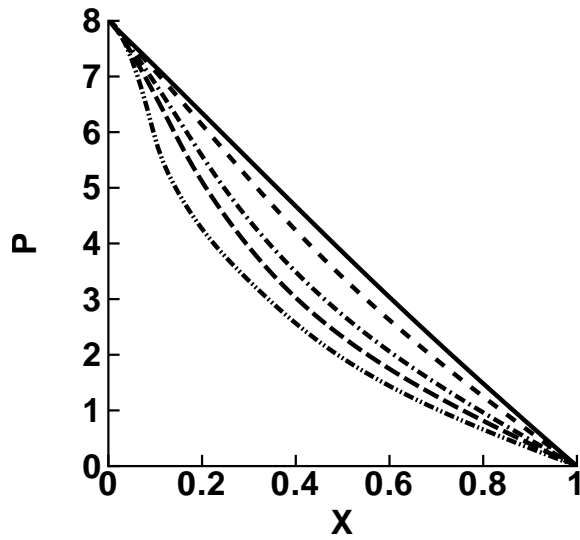


Рис. 5: Распределение значений давления вдоль оси канала для различных значений параметра A (см. Рис. 4)

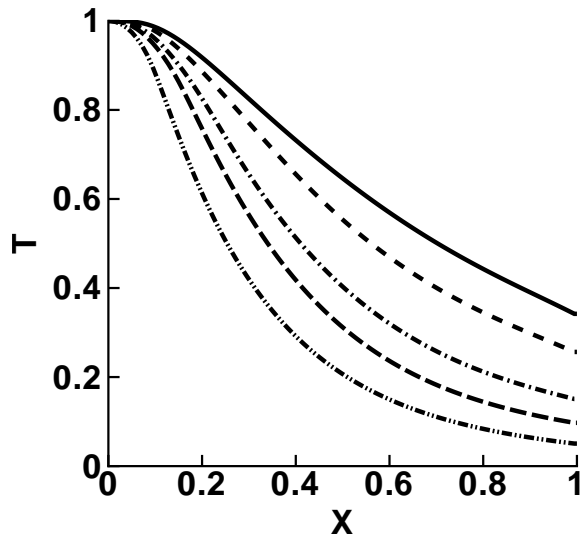


Рис. 6: Распределение значений температуры вдоль оси канала для различных значений параметра A (см. рис. 4).

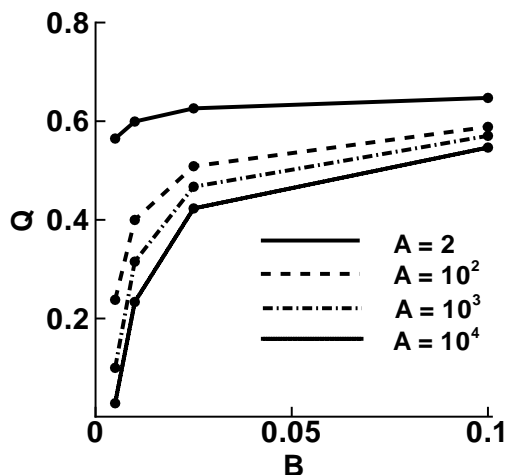


Рис. 7: Зависимость расхода Q аномально-вязкой жидкости от параметра B , характеризующего «ширину» немонотонной зависимости вязкости от температуры. Зависимость приведена для различных значений «амплитуды» вязкости A

вязкости и, соответственно, более быстрым прогревом жидкости.

Наиболее важной характеристикой течения жидкости в канале является ее расход. На Рис. 7 представлены зависимости влияния параметра B , характеризующего степень заполненности данного температурного диапазона аномалией вязкости («ширину») на приведенную величину расхода Q . Увеличение параметра B свидетельствует о сужении диапазона температур, на котором происходит немонотонное изменение вязкости. Таким образом уменьшение «ширины» аномалии приводит к монотонному увеличению расхода с выходом на предельное значение, когда влиянием аномалии можно пренебречь. Напротив, увеличение амплитудного значения аномальной вязкости приводит к уменьшению расходных характеристик течения (Рис. 8).

Важнейшую роль с точки зрения приложений играет зависимость расхода жидкости от перепада давления. Эта зависимость приведена на Рис. 9 для трех различных значений амплитуды вязкости. При этом обнаружен эффект уменьшения расхода при увеличении перепада давления. Так как результаты численных исследований приведены в безразмерных величинах, то горизонтальная прямая (пунктирная линия) означает линейную зависимость расхода от перепада давления, характерную для всех жидкостей с постоянной вязкостью.

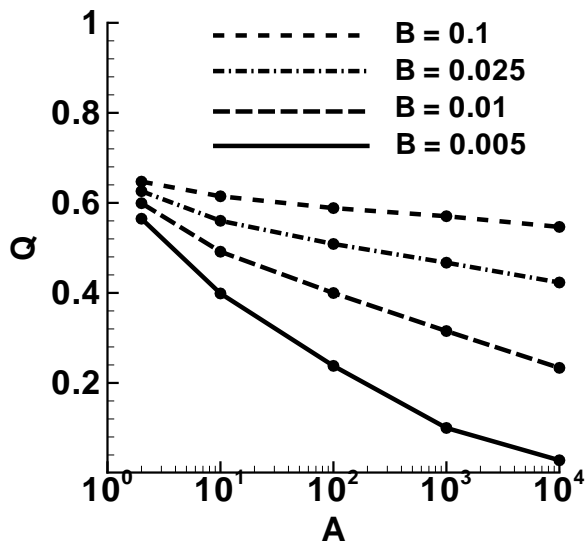


Рис. 8: Зависимость расхода anomalно-вязкой жидкости от «амплитуды» A немонотонной зависимости вязкости от температуры. Зависимость приведена для различных значений параметра B

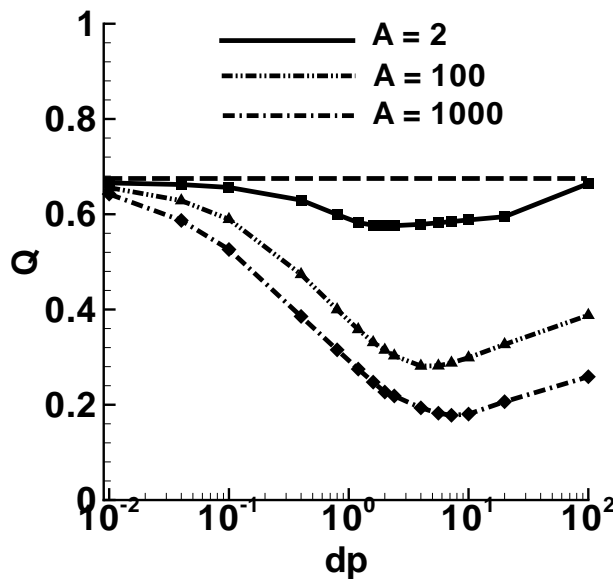


Рис. 9: Зависимость безразмерного расхода anomalно-вязкой жидкости от перепада давления для различных значений амплитуды вязкости A .

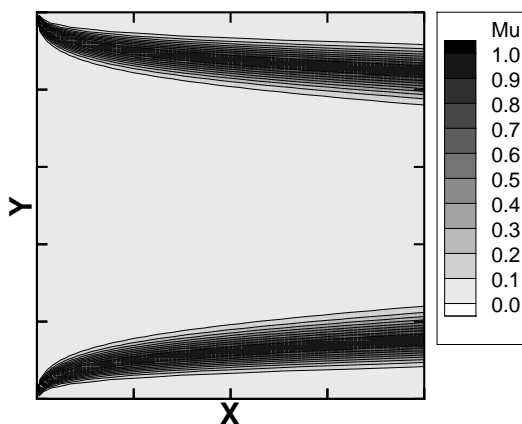


Рис. 10: Поле изменения значений вязкости при $\Delta p = 10$ и $A = 100$

Уменьшение расхода, характерное и для малых значений амплитуды A , связано с возрастанием области аномальной вязкости при увеличении перепада давления. Уменьшившись до определенного минимального уровня, расход с дальнейшим повышением перепада начинает увеличиваться. Физически это означает выход части вязкого барьера за пределы канала и образования двух незамкнутых зон аномальной вязкости, прилегающих к стенкам канала, и не пересекающих его поперечное сечение (Рис. 10).

4 Заключение

Исходная постановка задачи предусматривала исследование особенностей течения аномально-вязких жидкостей с немонотонной зависимостью вязкости от температуры. Необходимость этих исследований была вызвана, помимо научного интереса, попыткой решить дискуссионный вопрос о возможном характере течения такого рода жидкостей и определить степень отклонения структуры потока от течения Пуазейля.

Результаты исследований течения модельной жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры свидетельствуют о многообразии возможных гидродинамических эффектов. Основной особенностью термогидродинамики аномально-вязких сред, как установлено представленным исследованием, является образование локализованного

участка — «вязкого барьера», который в значительной мере способен влиять на структуру потока. Следующим важным фактором является форма «вязкого барьера» и его собственные параметры, а также их зависимость от внешних условий. Поскольку в реальных условиях они могут меняться, то предсказание характера течения и его основных характеристик может стать довольно сложной задачей, решение которой не может обойтись без тщательного анализа течения на основе математического моделирования.

Наиболее важным результатом настоящих исследований представляется обнаружение в пространстве параметров зоны с отрицательным приращением относительного расхода с ростом давления. Налицо парадоксальное свойство течения аномально-вязких жидкостей. На самом деле эффект уменьшения расхода связан с ростом области канала, охваченной «вязким барьером» при увеличении перепада давления. Таким образом, вытягивание «вязкого барьера» приводит к увеличению общего сопротивления течению жидкости в канале.

Список литературы

- [1] Bacon R. E., Fanelli R. Viscosity of liquid sulphur // J. Am. Chem. Soc. 1943. V. 65. P. 639–648
- [2] Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н., Везиров Р. Р. Численное исследование течения жидкости с аномальной вязкостью // Нефтепереработка и нефтехимия. 1997. № 8. С. 21–25
- [3] Urmancheev S. F., Kireev V. N. et al. A Numerical investigation of anomalously viscous liquid flowing along the heat exchanger channel // Proceeding of Third International Conference on Multiphase Flow, Lion (France). 1998. 6 p.
- [4] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.