УДК 532.532

Моделирование потерь давления на трение в трехслойных ламинарных потоках[1]

А. М. Ильясов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В данной работе предложена модель для определения потерь давления на трение в каждой фазе в трехслойном ламинарном установившемся течении несмешивающихся жидкостей и газа при течении в плоском канале. Эта модель обобщает аналогичную задачу для двухслойного ламинарного потока, предложенную ранее.

Полученные в конечном виде соотношения для потерь давления на трение в жидкостях, могут быть использованы в качестве замыкающих для трехжидкостной модели. Эти уравнения учитывают влияние межфазных границ и являются альтернативой подходу, используемому в зарубежной литературе. В упомянутом подходе пристенные и межфазные напряжения аппроксимируются формулами для однофазного потока и не учитывают взаимного влияния жидкостей на потерю давления на трение в фазах.

Проведено сравнение распределения параметров потока в этих двух моделях.

Ключевые слова: потери на трение, трехслойная модель, ламинарное течение, межфазная граница.

1 Введение

Трехфазные течения газо-нефтеводяных систем имеют большое практическое значение в нефтедобывающей промышленности. Но не смотря на важность исследования трехфазных потоков, имеется не так много экспериментальных и теоретических работ в этом направлении.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97907)

Экспериментальное исследование режимов течения трехфазной газожидкостной смеси было проведено в работе [1]. Было выявлено десять различных форм течения и построена диаграмма режимов течения трехфазного потока в координатах «приведенная скорость газа — приведенная скорость воды» при фиксированной приведенной скорости нефти.

Исследованию объемных газосодержаний при совместном течении воздуха, нефти и воды для всех структурных форм потока посвящена работа [2]. Здесь помимо экспериментального исследования было также проведено теоретическое исследование распределения объемных содержаний фаз с использованием модели потока дрейфа.

Экспериментальное исследование структуры течения, перепада давления и объемного содержания жидкой фазы для неочищенных нефтей в системе газ–нефть–вода было выполнено в работе [3].

Исследование перепада давления в зависимости от приведенной скорости жидкой фазы и ее объемного содержания при совместном течении газа и нефте-водяной эмульсии для некоторых основных режимов течения проводилось в работе [4]. В этой работе также исследовалось изменение перепада давления при переходе через точку инверсии эмульсии нефть-вода.

Теоретическое исследование стационарных уровней жидкостей в зависимости от приведенной скорости жидкой фазы (для различных скоростей газа) в трехфазном расслоенном потоке было выполнено в работе [5]. В этой работе расчеты проводились с использованием трехжидкостной модели для горизонтальной и слегка наклоненной трубы. Причем для течений в каналах с малым углом наклона к горизонту было обнаружено наличие трех различных решений для уровней жидкостей. Показано, что действительным (наиболее устойчивым) решением является решение с наименьшим уровнем жидкой фазы. В этой же работе бала предложена модель для определения границ перехода от расслоенного трехфазного течения к режимам течения с перемежающимися фазами на диаграмме приведенная скорость газа — приведенная скорость жидкости.

В представленной работе в конечном виде получены формулы для потерь давления на трение в каждой фазе при течении в плоском канале. Эти соотношения учитывают взаимное влияние фаз, при совместном течении, на потери давления на трение в жидкостях. Полученные соотношения являются функциями средних скоростей фаз, реологических свойств жидкостей и их объемных содержаний и могут использоваться в качестве замыкающих соотношений для трехжидкостной модели.

Обычно, моделируя потери на трение в расслоенном потоке, используют однофазные формулы для напряжений трения и не учитывают наличия «жидких границ» [5]. Такая неточность может сыграть решающую роль при моделировании установившихся течений в нефтедобывающих скважинах. Такие скважины могут иметь длину до нескольких сот метров и иметь множество прямолинейных участков, наклоненных под небольшими различными углами к горизонту. При этом структура потока будет коренным образом меняться при переходе от одного участка к другому. Не вполне корректное определение потерь на трение в фазах, в этом случае, может привести к неверным результатам в определении объемных содержаний фаз, их скоростей и уровней жидкостей при теоретическом прогнозировании трехслойных потоков.

Модель ламинарного трехслойного течения в плоском канале может быть использована для оценки границ перехода от раздельного течения жидкостей к другим режимам течения.

2 Трехжидкостная модель расслоенного потока

Трехслойные несжимаемые течения несмешивающихся (нерастворимых) жидкостей с гладкими межфазными границами, т. е. без образования волн на границах раздела фаз, в квазиодномерном приближении описываются известной приближенной системой уравнений [6]. Эти уравнения включают в себя скорости и давления фаз, осредненные по занимаемым сечениям.

В случае установившегося течения в плоском канале уравнения сохранения объемных расходов фаз и уравнения сохранения импульсов при движении фаз имеют вид:

$$\overline{v}_{10}\,(h-\eta_{10})=\overline{v}_1\,[h-\eta_1(x)], \tag{1}$$

$$\overline{v}_{20}\,(\eta_{10}-\eta_{20})=\overline{v}_2\,[\eta_1(x)-\eta_2(x)], \tag{2}$$

$$\overline{v}_{30}\,\eta_{20}=\overline{v}_3\,\eta_2(x), \tag{3}$$

$$\rho_1\,\overline{v}_1\,\frac{d\overline{v}_1}{dx}=-\frac{dp_1}{dx}-\rho_1\,g\,\sin\,\beta(x)-\frac{\tau_{1w}}{h-\eta_1(x)}+\frac{\tau_{21}}{h-\eta_1(x)}, \tag{4}$$

$$\rho_2\,\overline{v}_2\,\frac{d\overline{v}_2}{dx}=-\frac{dp_2}{dx}-\rho_2\,g\,\sin\,\beta(x)-\frac{\tau_{21}}{\eta_1(x)-\eta_2(x)}+\frac{\tau_{32}}{\eta_1(x)-\eta_2(x)}, \tag{5}$$

$$\rho_3\,\overline{v}_3\,\frac{d\overline{v}_3}{dx}=-\frac{dp_3}{dx}-\rho_3\,g\,\sin\,\beta(x)-\frac{\tau_{3w}}{\eta_2(x)}-\frac{\tau_{32}}{\eta_2(x)}, \tag{6}$$

где $\overline{v}_{10}$, $\overline{v}_1$; $\overline{v}_{20}$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}_{30}$, $\overline{v}_3$ — скорости газа, нефти и воды в начальном и произвольном сечениях соответственно; η_{10}, η_1 и η_{20}, η_2 — границы раздела между газом и нефтью и между нефтью и водой в начальном и произвольном сечениях соответственно; τ_{1w}, τ_{3w} — напряжения трения о стенку первой и третьей жидкостей соответственно; τ_{21}, τ_{32} — напряжения трения на межфазных границах между газом и нефтью и между нефтью и водой соответственно; ρ_1, ρ_2 и ρ_3 — постоянные плотности газа, нефти и воды соответственно; $\beta(x)$ — переменный угол наклона канала к горизонту; h — ширина канала. Знаки межфазных напряжений определяются из условий

$$\operatorname{sign}\tau_{21} = \operatorname{sign}(v_2 - v_1) \qquad \operatorname{sign}\tau_{32} = \operatorname{sign}(v_3 - v_2)$$

К уравнениям (1)–(6) необходимо добавить уравнения для баланса давлений, возникающие из-за кривизны поверхностей раздела:

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_{12}\,\eta_1''}{\left(1+\eta_1'^2\right)^{3/2}}, \qquad p_2 - p_3 = \frac{\sigma_{23}\,\eta_2''}{\left(1+\eta_2'^2\right)^{3/2}}, \tag{7}$$

где σ_{12}, σ_{23} — коэффициенты поверхностного натяжения на межфазных границах газ–нефть и нефть–вода соответственно (например [6]).

Систему уравнений (1)–(6) обычно замыкают соотношениями для напряжений трения на стенках канала и межфазных границах, в которых используются гидравлические формулы для однофазных течений [5, 6], которые для плоского канала имеют вид:

$$\tau_{1w} = C_1\,\rho_1\,\frac{\overline{v}_1^2}{2}, \qquad \tau_{3w} = C_3\,\rho_3\,\frac{\overline{v}_3^2}{2}, \tag{8}$$

$$\tau_{21} = \frac{C_{21}\,\rho_1\,(\overline{v}_2-\overline{v}_1)|\overline{v}_2-\overline{v}_1|}{2}, \quad \tau_{32} = \frac{C_{32}\,\rho_2\,(\overline{v}_3-\overline{v}_2)|\overline{v}_3-\overline{v}_2|}{2}, \tag{9}$$

где

$$C_1 = \frac{12}{Re_1}, \qquad C_2 = \frac{12}{Re_2}, \qquad C_3 = \frac{12}{Re_3}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} C_{21} = C_1; & \text{если} \quad \overline{v}_1 > \overline{v}_2; \\ C_{21} = C_2; & \text{если} \quad \overline{v}_1 < \overline{v}_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} C_{32} = C_2; & \text{если} \quad \overline{v}_2 > \overline{v}_3; \\ C_{32} = C_3; & \text{если} \quad \overline{v}_2 < \overline{v}_3. \end{cases} \tag{12}$$

Эти соотношения не учитывают наличия жидких межфазных границ и поэтому не вполне корректно определяют падение давления на трение в каждой фазе. Далее будут выведены новые соотношения, учитывающие взаимное влияние жидкостей на потери давления на трение в фазах. Указанные соотношения не содержат эмпирических констант и будут получены в результате обобщения подхода, предложенного в работе [7] для двухслойного ламинарного потока.

3 Моделирование потерь давления на трение

Уравнения импульсов (4)–(6) можно представить в следующем виде:

$$-\left(\frac{dp_i}{dx}\right) = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_{iV} - \left(\frac{dp}{dx}\right)_{iG} - \left(\frac{dp}{dx}\right)_{iF}, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{13}$$

т. е. полный перепад давления в каждой фазе, есть сумма перепадов за счет ускорения фаз, сил тяжести и сил трения. Далее будем моделировать последние слагаемые в правой части уравнения (13).

В отсутствие ускорений и сил тяжести уравнения движения примут вид:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{1F} = -\frac{\tau_{1w}}{h-\eta_1(x)} + \frac{\tau_{21}}{h-\eta_1(x)}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{2F} = -\frac{\tau_{21}}{\eta_1(x)-\eta_2(x)} + \frac{\tau_{32}}{\eta_1(x)-\eta_2(x)}, \tag{15}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{3F} = -\frac{\tau_{3w}}{\eta_2(x)} - \frac{\tau_{32}}{\eta_2(x)}, \tag{16}$$

Для того, чтобы получить явные выражения для потерь давления на трение в фазах рассмотрим «квазиравновесную» схему. Будем считать, что в каждом сечении канала истинные давления и скорости фаз связаны следующими уравнениями движения:

$$\frac{d^2 v_i}{dy^2} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{iF}\frac{1}{\mu_i} = \frac{f_i}{\mu_i}, \qquad f_i = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{iF}, \qquad i = \overline{1,3}, \tag{17}$$

где учтено, что истинные давления фаз равны осредненным давлениям, поскольку характерное время выравнивания давления в фазах много меньше характерного времени процесса; μ_i — вязкости i-ой среды.

Интегрируем систему уравнений (17) при следующих граничных условиях:

$$v_1(h) = 0, \quad v_1(\eta_1) = v_2(\eta_1), \quad v_2(\eta_2) = v_3(\eta_2), \quad v_3(0) = 0, \tag{18}$$

$$\mu_1 \left.\frac{dv_1}{dy}\right|_{y=\eta_1} = \mu_2 \left.\frac{dv_2}{dy}\right|_{y=\eta_1}, \qquad \mu_2 \left.\frac{dv_2}{dy}\right|_{y=\eta_2} = \mu_3 \left.\frac{dv_3}{dy}\right|_{y=\eta_2}. \tag{19}$$

Первое и четвертое равенства в (18) — условия прилипания жидкостей на стенках канала, а второе и третье — равенства скоростей фаз на межфазных границах. Соотношения (19) выражают равенство касательных напряжений на границах раздела фаз.

Тогда получим профили истинных скоростей:

$$v_1 = \frac{f_1 y^2}{2\mu_1} + Ay + B, \quad v_2 = \frac{f_2 y^2}{2\mu_2} + Cy + D, \quad v_3 = \frac{f_3 y^2}{2\mu_3} + Ey, \tag{20}$$

в которых коэффициенты определяются из матричного уравнения

$$K = Z \cdot F, \tag{21}$$

где введены обозначения:

$$K = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}, \qquad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Элементы матрицы Z представляются выражениями:

$$z_{11} = \frac{2\mu_1(\mu_2-\mu_3)\eta_1\eta_2 + \mu_3(2\mu_1-\mu_2)\eta_1^2 + \mu_2\mu_3 h^2}{2\mu_1\left(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2\right)}, \tag{23}$$

$$z_{12} = \frac{(2\mu_2-\mu_3)\eta_2^2 + 2(\mu_3-\mu_2)\eta_1\eta_2 - \mu_3\eta_1^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \tag{24}$$

$$z_{13} = -\frac{\mu_2\eta_2^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} z_{21} = {} & \frac{\mu_1(\mu_2-\mu_3)\eta_2 h^2 + \mu_3(\mu_1-\mu_2)\eta_1 h^2}{2\mu_1\left(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2\right)} + \\ & + \frac{2\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_1\eta_2 h + \mu_3(\mu_2-2\mu_1)\eta_1^2 h}{2\mu_1\left(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2\right)}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$z_{22} = \frac{(\mu_3-2\mu_2)\eta_2^2 h + 2(\mu_2-\mu_3)\eta_1\eta_2 h + \mu_3\eta_1^2 h}{2\left(\mu_3(\mu_2(\eta_1-h)-\mu_1\eta_1)+\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2\right)}, \tag{27}$$

$$z_{23} = \frac{\mu_2 h \eta_2^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{28}$$

$$z_{31} = \frac{\mu_3(\eta_1 - h)^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{29}$$

$$z_{32} = \frac{\mu_3(\mu_1 - 2\mu_2)\eta_1^2 + \mu_1(2\mu_2 - \mu_3)\eta_2^2 + 2\mu_2\mu_3\eta_1 h}{2\mu_2\left(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2\right)}, \tag{30}$$

$$z_{33} = -\frac{\mu_1\eta_2^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{31}$$

$$z_{41} = \frac{(\mu_2 - \mu_3)\eta_2(\eta_1 - h)^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} z_{42} = \frac{(\mu_2 - \mu_3)(\mu_1 - 2\mu_2)\eta_1^2\eta_2 + (\mu_1 - \mu_2)(\mu_3 - 2\mu_2)\eta_1\eta_2^2}{2\mu_2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)} + \\ + \frac{2\mu_2(\mu_2 - \mu_3)\eta_1\eta_2 h + \mu_2(\mu_3 - 2\mu_2)\eta_2^2 h}{2\mu_2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \end{gathered} \tag{33}$$

$$z_{43} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\eta_1\eta_2^2 + \mu_2\eta_2^2 h}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{34}$$

$$z_{51} = \frac{\mu_2(\eta_1 - h)^2}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{35}$$

$$z_{52} = \frac{\mu_1\eta_2^2 + 2(\mu_2 - \mu_1)\eta_1\eta_2 + (\mu_1 - 2\mu_2)\eta_1^2 + 2\mu_2\eta_1 h - 2\mu_2\eta_2 h}{2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{36}$$

$$z_{53} = \frac{\mu_1(\mu_2 - 2\mu_3)\eta_2^2 + 2\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\eta_1\eta_2 + 2\mu_2\mu_3\eta_2 h}{2\mu_3(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \tag{37}$$

Далее найдем средние скорости жидкостей:

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{h - \eta_1}\int_{\eta_1}^{h} v_1\,dy, \quad \overline{v}_2 = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2}\int_{\eta_2}^{\eta_1} v_2\,dy, \quad \overline{v}_3 = \frac{1}{\eta_2}\int_{0}^{\eta_2} v_3\,dy. \tag{38}$$

Отсюда получим:

$$f_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 3, \tag{39}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \overline{v}_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{v}_2 & b_2 & b_3 \\ \overline{v}_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & \overline{v}_1 & a_3 \\ b_1 & \overline{v}_2 & b_3 \\ c_1 & \overline{v}_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \overline{v}_1 \\ b_1 & b_2 & \overline{v}_2 \\ c_1 & c_2 & \overline{v}_3 \end{vmatrix}, \tag{40}$$

а элементы определителя Δ равны:

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{4\mu_1(\mu_2-\mu_3)\eta_2 h^2 + \mu_3(4\mu_1 - 3\mu_2)\eta_1 h^2}{12\mu_1(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)} + \\ + \frac{8\mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_1\eta_2 h + \mu_3(3\mu_2 - 8\mu_1)\eta_1^2 h}{12\mu_1(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)} + \\ + \frac{4\mu_1(\mu_2-\mu_3)\eta_1^2\eta_2 + \mu_3(4\mu_1-\mu_2)\eta_1^3 + \mu_2\mu_3 h^3}{12\mu_1(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered} a_2 = \frac{(\mu_3 - 2\mu_2)\eta_2^2 h + 2(\mu_2-\mu_3)\eta_1\eta_2 h + \mu_3\eta_1^2 h}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)} + \\ + \frac{(2\mu_2-\mu_3)\eta_1\eta_2^2 + 2(\mu_3-\mu_2)\eta_1^2\eta_2 - \mu_3\eta_1^3}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \end{gathered} \tag{42}$$

$$a_3 = \frac{\mu_2(h-\eta_1)\eta_2^2}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \tag{43}$$

$$\begin{gathered} b_1 = \frac{\mu_3\eta_1(h-\eta_1)^2 + (2\mu_2-\mu_3)\eta_1^2\eta_2}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)} + \\ + \frac{2(\mu_3-2\mu_2)\eta_1\eta_2 h + (2\mu_2-\mu_3)\eta_2 h^2}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3-\mu_2)\eta_2)}, \end{gathered} \tag{44}$$

$$b_2 = \frac{\mu_1(4\mu_2 - \mu_3)\eta_2^3 + (12\mu_2^2 + 3\mu_1\mu_3 - 4\mu_2\mu_3 - 8\mu_1\mu_2)\eta_1\eta_2^2}{12\mu_2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)} +$$

$$+\frac{4\mu_2(\mu_3 - 3\mu_2)\eta_2^2 h + (8\mu_2\mu_3 + 4\mu_1\mu_2 - 3\mu_1\mu_3 - 12\mu_2^2)\eta_1^2\eta_2}{12\mu_2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)} + \quad (45)$$

$$+\frac{4\mu_2(3\mu_2 - 2\mu_3)\eta_1\eta_2 h + \mu_3(\mu_1 - 4\mu_2)\eta_1^3 + 4\mu_2\mu_3\eta_1^2 h}{12\mu_2(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)},$$

$$b_3 = \frac{(\mu_1 - 2\mu_2)\eta_1\eta_2^2 + 2\mu_2\eta_2^2 h - \mu_1\eta_2^3}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \quad (46)$$

$$c_1 = \frac{\mu_2(h - \eta_1)^2\eta_2}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}, \quad (47)$$

$$c_2 = \frac{\mu_1\eta_2^3 + 2(\mu_2 - \mu_1)\eta_1\eta_2^2 + (\mu_1 - 2\mu_2)\eta_1^2\eta_2}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)} + \quad (48)$$

$$+\frac{2\mu_2\eta_1\eta_2 h - 2\mu_2\eta_2^2 h}{4(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)},$$

$$c_3 = \frac{\mu_1(\mu_2 - 4\mu_3)\eta_2^3 + 4\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\eta_1\eta_2^2 + 4\mu_2\mu_3\eta_2^2 h}{12\mu_3\,(\mu_3(\mu_2(\eta_1 - h) - \mu_1\eta_1) + \mu_1(\mu_3 - \mu_2)\eta_2)}. \quad (49)$$

Теперь, используя (14)–(16), получим суммарные напряжения трения, действующие на каждую жидкость:

$$\begin{aligned} -\tau_{1w} + \tau_{21} &= \left(\frac{dp}{dx}\right)_{1F}(h - \eta_1) = f_1\,(h - \eta_1), \\ -\tau_{21} + \tau_{32} &= \left(\frac{dp}{dx}\right)_{2F}(\eta_1 - \eta_2) = f_2\,(\eta_1 - \eta_2), \\ -\tau_{3w} - \tau_{32} &= \left(\frac{dp}{dx}\right)_{3F}\eta_2 = f_3\,\eta_2. \end{aligned} \quad (50)$$

Соотношения (50), вместе с полученными выражениями (39)–(49) и исходными уравнениями модели плоского трехслойного течения (1)–(6), представляют собой замкнутую математическую модель ламинарного потока.

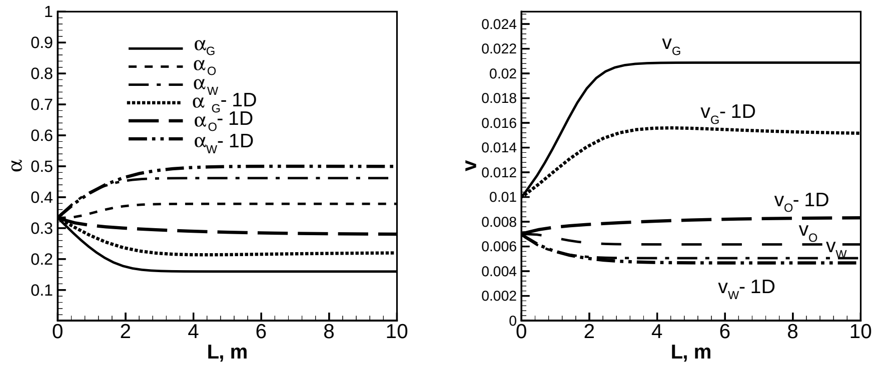

Рис. 1: Сравнение изменений объемных содержаний α и скоростей фаз по длине горизонтального канала в системе газ-нефть-вода по двум одномерным моделям

4 Некоторые численные результаты

Рассматривались численные решения модельных задач о трехслойном течении системы газ–нефть–вода в горизонтальном канале и нефтедобывающей скважине без учета эффектов поверхностного натяжения на межфазных границах для выше описанной модели.

Индексы 1, 2, и 3 внизу относятся к газу, нефти и воде соответственно.

На входе в канал во всех расчетах объемные содержания фаз принимались равными. Ширина канала бралась равной $h = 0.15$ м. Вязкость газа принималась равной $\mu_1 = 0.00001$ Па·с, а плотность бралась равной $\rho_1 = 1.23$ кг/м^3. Вязкости нефти и воды принимались равными $\mu_2 = 0.01$ Па·с и $\mu_3 = 0.001$ Па·с, а плотности: $\rho_2 = 800$ кг/м^3, $\rho_3 = 1000$ кг/м^3 соответственно.

На Рис. 1 показано сравнение распределения объемных содержаний фаз и их скоростей по длине горизонтального канала ($\beta = 0^0$). Длина канала принималась равной $L = 10$ м. Начальные скорости жидкостей равнялись $v_2 = v_3 = 0.007$ м/с, а начальная скорость газа $v_1 = 0.01$ м/с.

В первом случае падение давления на трение в фазах рассчитывалось по гидравлическим формулам для однофазного потока, а во втором использовались полученные соотношения для потерь на трение в жидкостях (Эти графики отмечены буквами 1D). Видно, что стационарные

Рис. 2: Схема нефтедобывающей скважины

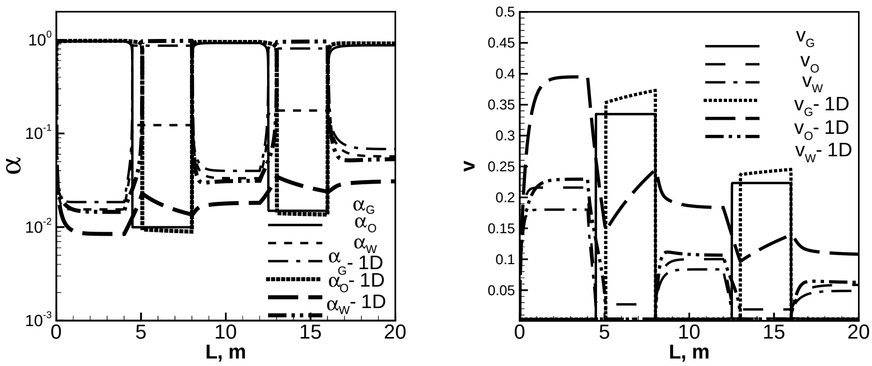

Рис. 3: Сравнение изменений объемных содержаний α и скоростей фаз по длине нефтедобывающей в системе газ-нефть-вода по двум одномерным моделям

объемные содержания нефти (на выходе) отличаются друг от друга примерно на 25%.

На Рис. 3 показано сравнение распределений объемных содержаний фаз и их скоростей по длине нефтедобывающей скважины, схема которой показана на Рис. 2. Скважина представлена каналом состоящим из прямолинейных участков, наклоненных под различными (убывающими по модулю) углами к горизонту ($\beta = -0.5^0$, $\beta = 0.1^0$, $\beta = -0.05^0$, $\beta = 0.03^0$, $\beta = -0.01^0$). При расчете количество прямолинейных участков канала бралось равным пяти, а их длины принимались равными $L = 4$ м. Начальные скорости жидкостей равнялись $v_1 = v_2 = v_3 = 0.01$ м/с.

Графики на Рис. 3 показывают, что при переходе от одного прямолинейного участка к другому происходит сильная перестройка структуры течения. При этом объемное содержание нефти отличается почти на порядок на участках с положительными углами наклона к горизонту в зависимости от того какую модель мы выбираем для потерь на трение.

Представленную квазиодномерную модель с полученными выражениями для потерь давления на трение в жидкостях можно использовать для качественной оценки структуры течения и, в частности, для оценки изменения состава фаз в добывающих скважинах. Показано, что в случае каналов со сложной геометрией некорректное определение трения в фазах может привести к сильно завышенным (заниженным) значениям выхода продуктов в трехфазном потоке.

Список литературы

[1] Acikgoz M., Franca F., Lahey Jr. R. T. An experimental study of three-phase flow regimes // Int. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18, №. 3. P. 327–336.

[2] R. T. Lahey, Jr. M. Acikgoz, F. Franca. Global volumetric phase fractions in horizontal three-phase flows // AIChE. J. 1992. V. 38, № 7. P. 1049–1058.

[3] Utvik O. H., Valle A., Rinde T. Pressure drop, flow pattern and slip for a multipase crude oil-water-hydrocarbon gas sistem // Third Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF'1998), Lyon (France),1998 (CD).

[4] Cai J., Chen T., Luo Y. The experimental investigations on the pressure drop of the three-phase flow of gas, water-oil emulsions in horizontal pipes // Third Int. Conf. on Multiphase Flow (ICMF'1998), Lyon (France), 1998 (CD).

[5] Y. Taitel, D. Barnea, J. P. Brill. Stratified three phase flow in pipes// Int. J. Multiphase Flow. 1995. V. 21, №. 1. P. 53–60.

[6] Valle A. Multiphase pipeline flows in hydrocarbon recovery// Multiphase science and technology. V. 10, №. 1. P. 1–139.

[7] Ильясов А. М., Киреев В. Н., Урманчеев С. Ф. Определение потерь давления на трение в ламинарных расслоенных потоках // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Модели механики сплошной среды. Материалы XVI сессии Междунар. школы по моделям сплошной среды / Каз. матем. об-во. Казань 2002. Т. 16. С. 202–209.