



УДК 532.532

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ РАССЛОЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ¹

А. М. Ильясов, В. Н. Киреев, С. Ф. Урманчиев, И. Ш. Ахатов

Институт механики УНЦ РАН, Башкирский государственный университет, Уфа

Аннотация. Работа посвящена исследованию расслоенного режима ламинарного течения двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале и созданию расчетной схемы для определения параметров потока. Проведен критический анализ известной двухжидкостной модели (Two Fluids Model) и предложена новая схема для определения пристенного и межфазного трения, названная гидравлическим приближением в теории расслоенных течений. Верификация предложенной приближенной модели осуществлена на основе прямого численного решения уравнений Навье-Стокса для каждой жидкости конечно-разностным методом с отслеживанием границы раздела фаз методом VOF (Volume of Fluid).

Представлены графики, иллюстрирующие изменение межфазной границы и осредненных по занимаемой доле сечения скоростей фаз вдоль плоского канала. Даны также результаты сравнительных расчетов по двухжидкостной модели, по разработанной модели в гидравлическом приближении и прямого численного моделирования. Показано, что расчеты в соответствии с гидравлическим приближением больше соответствуют результатам прямого численного моделирования. Таким образом, модель гидравлического приближения является наиболее предпочтительным методом расчета расслоенных течений, особенно в случаях переменного по длине объемного содержания жидкостей.

Ключевые слова: гидравлическое приближение, гидравлическое сопротивление, двухжидкостная модель, конечно-разностные методы, ламинарное течение, межфазная граница, метод VOF, расслоенное течение, численное моделирование.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97907)

1 Введение

Расслоенные течения несмешивающихся жидкостей представляют значительный интерес при решении задач промысловой геофизики и добычи нефти с применением горизонтальных и наклонных скважин. Теоретические и экспериментальные исследования, представленные в обзорной работе А. Валле [1] посвящены описанию разнообразных математических моделей, используемых для изучения двух- и трехслойных, а также диспергированных потоков.

Большое распространение получила модель течения несмешивающихся жидкостей в одномерном приближении [2, 3], — так называемая, двухжидкостная модель. В этой модели постулируется постоянство границы раздела фаз. Двухжидкостная модель хорошо описывает лабораторные эксперименты, проводимые на стендах с фиксированным углом наклона канала к горизонту. Однако она мало пригодна в случае изучения расслоенных течений на реальной скважине, в которой имеется большое число участков с переменным наклоном и, соответственно, точек перегиба.

В представленной работе рассмотрена альтернативная математическая модель для исследования расслоенных течений. Используемое гидравлическое приближение основано на соображениях равенства заданного перепада давления с одной стороны и сил трения и инерции — с другой.

В данной работе проведено также исследование расслоенного ламинарного режима течения двух жидкостей на основе конечно-разностного метода решения уравнений Навье-Стокса для каждой жидкости. При этом граница раздела фаз отслеживается методом VOF, предложенным Хертом и Николсом [4, 6, 7].

2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о ползущем течении двух вязких жидкостей в плоском канале длины L и ширины h , т. е. в области $D = [0, L] \times [0, h]$. Будем считать, что жидкости несжимаемы и взаимно нерастворимы.

Такой поток будем описывать одной системой уравнений, состоящей из уравнений неразрывности и Навье-Стокса, которые представим в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k) = 0, \quad (1)$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	.2	.5	.2	0
0	0	0	0	0	0	.6	1	.7	.1
.1	0	0	0	0	.4	1	1	1	.7
.6	0	0	0	.2	.8	1	1	1	1
.9	.7	.4	.5	.8	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 1: Схема отслеживания межфазной границы методом VOF

$$\frac{\partial(\rho v^l)}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^l v^k) = -\nabla_l p + \nabla_k(\mu \nabla_k v^l) + F^l, \tag{2}$$

однако плотность и вязкость будут функциями пространственных координат:

$$\begin{cases} \mu = \mu_1; & \rho = \rho_1, & (x, y) \in D_1; \\ \mu = \mu_2; & \rho = \rho_2, & (x, y) \in D_2, \end{cases} \tag{3}$$

где D_1 и D_2 ($D = D_1 + D_2$) — области, занимаемые первой и второй жидкостями, соответственно, а $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$ — постоянные величины.

Поскольку мы будем рассматривать длины порядка $L = 10$ м., то в дальнейшем будем считать, что произведение коэффициента поверхностного натяжения на кривизну границы раздела мало. Поэтому, в уравнении движения давления фаз положены равными друг другу.

Положение границы раздела фаз будем отслеживать с помощью метода VOF. Данный метод относится к классу эйлерово-лагранжевых методов, поскольку с одной стороны в методе используется фиксированная эйлерова сетка, а с другой — перемещение границы происходит лагранжевым способом. В основе метода VOF лежит введение характеристической функции Хевисайда χ , которая принимает значение 0, если в данной точке пространства находится первая фаза и значение 1, если в данной точке пространства находится вторая фаза. Таким образом, функция χ терпит разрыв в точках, принадлежащих границе между фазами. Изменение функции χ характеризуется следующим уравнени-

ем переноса:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v^k \nabla_k \chi = 0. \quad (4)$$

Пусть функция S есть сеточная дискретизация характеристической функции χ , тогда S принимает значение 0, если ячейка целиком заполнена первой фазой, 1 — если ячейка целиком заполнена второй фазой и принимает промежуточное значение между 0 и 1 для ячеек через которую проходит межфазная граница (Рис. 1).

Введем декартову систему координат таким образом, что ось Ox свяжем с нижней стенкой канала, а ось Oy с левой (начальной) границей. В качестве граничных условий для скорости примем условия «прилипания» на стенках плоской трубы, а для давления — равенство нулю производной давления по направлению нормали к стенкам трубы:

$$\vec{v}|_{y=0} = 0, \quad \vec{v}|_{y=h} = 0, \quad \left. \frac{dp}{dn} \right|_{y=0} = \left. \frac{dp}{dn} \right|_{y=h} = 0. \quad (5)$$

На входе и выходе канала примем следующие граничные условия:

$$\vec{v}|_{x=0} = \vec{v}(y), \quad \left. \frac{d\vec{v}}{dn} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{dp}{dn} \right|_{x=0} = \left. \frac{dp}{dn} \right|_{x=L} = 0. \quad (6)$$

Начальные условия задачи представим в виде:

$$\vec{v}(x, y)|_{t=0} = \vec{v}_0(x, y), \quad p(x, y)|_{t=0} = p_0(x, y). \quad (7)$$

3 Гидравлическое приближение в теории рас- слоенных течений

Расчет двумерных неоднородных течений довольно трудоемок и, поэтому, на практике используют квазиодномерные модели течения, в которые входят осредненные параметры потока. Двухжидкостная модель установившегося течения несжимаемых жидкостей в случае плоской трубы Рис. 2 сводится к следующей системе уравнений — уравнениям сохранения расходов:

$$\bar{v}_{10} (h - y_0) = \bar{v}_1 [h - \eta(x)], \quad (8)$$

$$\bar{v}_{20} y_0 = \bar{v}_2 \eta(x). \quad (9)$$

и уравнениям сохранения количества движения фаз:

$$\rho_1 \bar{v}_1 \frac{d\bar{v}_1}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \rho_1 g \sin \alpha(x) - \frac{\tau_{1w}}{h - \eta(x)} \mp \frac{\tau_{12}}{h - \eta(x)}, \quad (10)$$

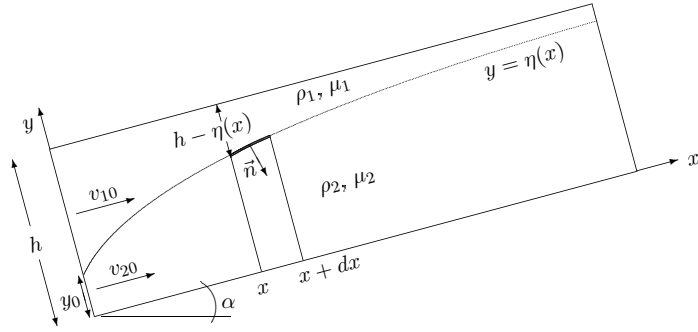


Рис. 2: Схема течения двух вязких жидкостей в наклонном канале

$$\rho_2 \bar{v}_2 \frac{d\bar{v}_2}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \rho_2 g \sin\alpha(x) - \frac{\tau_{2w}}{\eta(x)} \pm \frac{\tau_{12}}{\eta(x)}, \quad (11)$$

где τ_{1w} , τ_{2w} — напряжения трения о стенку первой и второй жидкостей, соответственно; τ_{12} — напряжение трения на межфазной границе. Верхние знаки в правых частях уравнений соответствуют ситуации, когда $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$, а нижние обратной ситуации. Замыкающие систему уравнений (8–11) напряжения на стенках канала и межфазной границе, определим согласно [3, 1]:

$$\tau_{1w} = C_{1W} \rho_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2}, \quad \tau_{2w} = C_{2W} \rho_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2}. \quad (12)$$

Для плоского канала имеем:

$$C_{1W} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad C_{2W} = \frac{\lambda_2}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{24}{Re_1}, \quad \lambda_2 = \frac{24}{Re_2}, \quad (13)$$

где λ_1 , λ_2 — коэффициенты гидравлического сопротивления при ламинарном течении, а числа Рейнольдса для плоского канала есть:

$$Re_1 = \frac{\rho_1 \bar{v}_1 (h - \eta(x))}{\mu_1}, \quad Re_2 = \frac{\rho_2 \bar{v}_2 \eta(x)}{\mu_2}. \quad (14)$$

Напряжение трения на межфазной границе :

$$\tau_{12} = \frac{C_{12} \rho_{12} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|}{2}, \quad (15)$$

где коэффициент межфазного трения C_{12} и плотность ρ_{12} на границе раздела фаз равен:

$$\begin{cases} C_{12} = C_{1W}; & \rho_{12} = \rho_1, & \text{если } \bar{v}_1 > \bar{v}_2; \\ C_{12} = C_{2W}; & \rho_{12} = \rho_2, & \text{если } \bar{v}_1 < \bar{v}_2. \end{cases} \quad (16)$$

Приведенная выше модель двухфазного слоистого течения в плоском канале имеет ряд недостатков. Прежде всего это касается расчета пристенных напряжений и напряжений, возникающих на межфазной границе.

Во-первых, соотношения, аппроксимирующие коэффициенты трения при ламинарном течении, справедливы для однофазного потока с твердыми стенками. В случае же расслоенного течения одна «стенка» (межфазная граница) является жидкой. Кроме того, подставив уравнения сохранения массы каждой из жидкостей (8) и (9) в соотношения (14) получим, что коэффициенты гидравлического сопротивления (13) являются постоянными величинами, не зависящими от средних скоростей движения фаз.

Во вторых, напряжения на межфазной границе, определенные в предыдущей модели, меняются скачком (по модулю) в зависимости от того, какая из жидкостей имеет большую (среднюю по сечению) скорость. Реальные же напряжения должны меняться гладко по абсолютной величине.

Выскажем некоторые соображения, которые позволят аппроксимировать пристенное и межфазное трение таким образом, чтобы обойти вышеуказанные недостатки.

Для этого покажем, сначала, как получить параболический профиль скорости для однофазного установившегося ламинарного движения. В канале высотой h и длиной L выделим симметричную относительно оси симметрии канала полосу, заключенную на отрезке $y \in [\xi, h - \xi]$, и напишем уравнение равновесия этой полосы. Тогда легко получить профиль скорости:

$$(p_1 - p_2)(h - 2\xi) = 2L\tau, \quad (17)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{\Delta p}{2\mu L}(h - 2\xi), \quad (18)$$

$$v = \frac{\Delta p}{2\mu L}(h\xi - \xi^2). \quad (19)$$

Далее получим новые выражения для суммарного трения, действующего на каждую жидкость в двухслойном течении, исходя из предположения параболического профиля скоростей в них, и рассматривая равновесие элементов этих жидкостей.

4 Определение суммарных напряжений трения, действующих на каждую жидкость в ламинарно-ламинарном расслоенном течении

Из уравнений Навье-Стокса можем оценить характерные время и расстояние установления параболического профиля скорости:

$$L_* = v_* t_* = \frac{v_* h^2}{\nu}$$

Для медленных течений имеет место оценка $L_* < L$, поэтому можно считать, что в основной части трубы силы трения фаз уравновешиваются потерей давления на это трение. Этот факт мы используем, в дальнейшем, при вычислении сил трения, испытываемых жидкостями.

Уравнения ламинарного движения жидкостей в наклонном канале имеют вид:

$$\frac{d^2 v_1}{dy^2} = \left[\left(\frac{dp}{dx} \right)_1 + \rho_1 g \sin \alpha \right] \frac{1}{\mu_1} = \frac{f_1}{\mu_1}, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dy^2} = \left[\left(\frac{dp}{dx} \right)_2 + \rho_2 g \sin \alpha \right] \frac{1}{\mu_2} = \frac{f_2}{\mu_2},$$

где введены обозначения:

$$f_1 = \left(\frac{dp}{dx} \right)_1 + \rho_1 g \sin \alpha, \quad f_2 = \left(\frac{dp}{dx} \right)_2 + \rho_2 g \sin \alpha. \quad (21)$$

Интегрируем уравнения (20) при следующих граничных условиях:

$$v_1(h) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad (22)$$

$$v_1(\eta) = v_2(\eta), \quad \mu_1 \left. \frac{dv_1}{dy} \right|_{y=\eta} = \mu_2 \left. \frac{dv_2}{dy} \right|_{y=\eta}. \quad (23)$$

Уравнения (22) являются условиями прилипания жидкостей на стенках канала, а уравнения (23) — условия равенства скоростей и напряжений на границе раздела фаз.

Тогда получим профили скоростей:

$$v_1 = \frac{f_1 y^2}{2\mu_1} + Ay + B, \quad v_2 = \frac{f_2 y^2}{2\mu_2} + Cy, \quad (24)$$

коэффициенты которых равны:

$$A = \frac{f_1[(2\mu_1 - \mu_2)\eta^2 + \mu_2 h^2] - f_2 \mu_1 \eta^2}{2\mu_1[\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}, \quad (25)$$

$$B = \frac{-f_1 h \eta[(2\mu_1 - \mu_2)\eta + (\mu_2 - \mu_1)h] + f_2 \mu_1 h \eta^2}{2\mu_1[\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}, \quad (26)$$

$$C = \frac{f_1 \mu_2 (h - \eta)^2 - f_2 [(2\mu_2 - \mu_1)\eta^2 - 2\mu_2 h \eta]}{2\mu_2[\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}. \quad (27)$$

Далее найдем средние скорости жидкостей:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{h - \eta} \int_{\eta}^h v_1 dy, \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} v_2 dy. \quad (28)$$

Отсюда получим:

$$\bar{v}_1 = a_1 f_1 + a_2 f_2, \quad \bar{v}_2 = b_1 f_1 + b_2 f_2, \quad (29)$$

или

$$f_1 = \frac{b_2 \bar{v}_1 - a_2 \bar{v}_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad f_2 = \frac{-b_1 \bar{v}_1 + a_1 \bar{v}_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (30)$$

где коэффициенты равны:

$$a_1 = \frac{h^2 \eta (4\mu_1 - 3\mu_2) + h \eta^2 (3\mu_2 - 8\mu_1)}{12\mu_1 [\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]} + \frac{\eta^3 (4\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 h^3}{12\mu_1 [\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}, \quad (31)$$

$$a_2 = \frac{\eta^2 (\eta - h)}{4[\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}, \quad (32)$$

$$b_1 = \frac{\eta (\eta - h)^2}{4[\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}, \quad b_2 = \frac{4\mu_2 h \eta^2 + (\mu_1 - 4\mu_2) \eta^3}{12\mu_2 [\mu_2(\eta - h) - \mu_1 \eta]}. \quad (33)$$

Если возьмем формальный предел при $\eta \rightarrow 0$ первого уравнения (30), то получим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{L} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\Delta p_1}{L} = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{dp}{dx} \right)_1 = - \lim_{\eta \rightarrow 0} f_1 + \rho_1 g \sin \alpha = \\ &= \frac{12\mu_1 \bar{v}_1}{h^2} + \rho_1 g \sin \alpha, \end{aligned} \quad (34)$$

откуда при $\alpha = 0$

$$\Delta p = \frac{12\mu_1 \bar{v}_1 L}{h^2}. \quad (35)$$

По определению коэффициента гидравлического сопротивления в случае плоского канала:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{h} \frac{\rho \bar{v}^2}{2}. \quad (36)$$

Подставляя (35) в (36), имеем:

$$\lambda = \frac{24}{Re}, \quad Re = \frac{\rho_1 \bar{v}_1 h}{\mu_1}, \quad (37)$$

т. е. в точности получаем закон сопротивления для плоской трубы.

При установившемся течении жидкостей, когда скорости не меняются по длине плоской трубы, можем записать уравнения равновесия фаз:

$$\Delta p_1(h - \eta) - \tau_{1w}L \mp \tau_{12}L - \rho_1 g \sin \alpha L (h - \eta) = 0, \quad (38)$$

$$\Delta p_2\eta - \tau_{2w}L \pm \tau_{12}L - \rho_2 g \sin \alpha L \eta = 0,$$

откуда следуют суммарные напряжения, действующие на каждую жидкость:

$$\tau_{1w} \pm \tau_{12} = - \left(\frac{dp}{dx} \right)_1 (h - \eta) - \rho_1 g \sin \alpha (h - \eta) = -f_1(h - \eta), \quad (39)$$

$$\tau_{2w} \mp \tau_{12} = - \left(\frac{dp}{dx} \right)_2 \eta - \rho_2 g \sin \alpha \eta = -f_2\eta, \quad (40)$$

где верхние знаки соответствуют случаю, когда $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$, а нижние, когда $\bar{v}_2 > \bar{v}_1$.

Полученные соотношения (39–40), вместе с выражениями (30)–(33) и исходными уравнениями модели плоского двухслойного течения (8)–(11), представляют собой замкнутую математическую модель ламинарного потока.

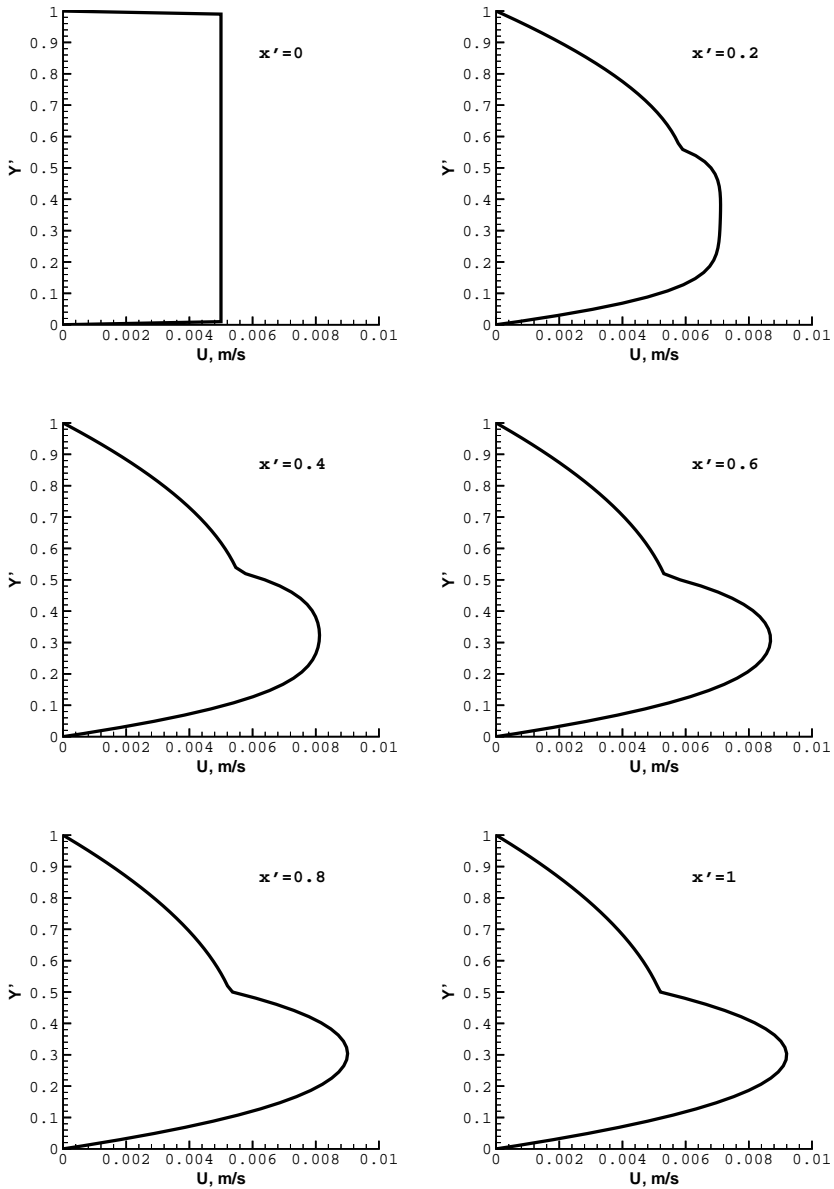


Рис. 3: Формирование профилей скоростей фаз по длине канала. Численное решение методом VOF

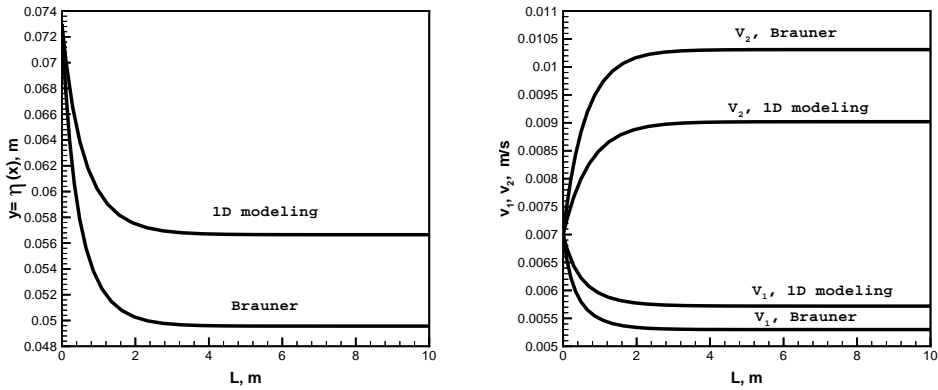


Рис. 4: Сравнение изменения межфазной границы $y = \eta(x)$ и скоростей фаз по длине горизонтального канала в системе нефть—вода по двум одномерным моделям

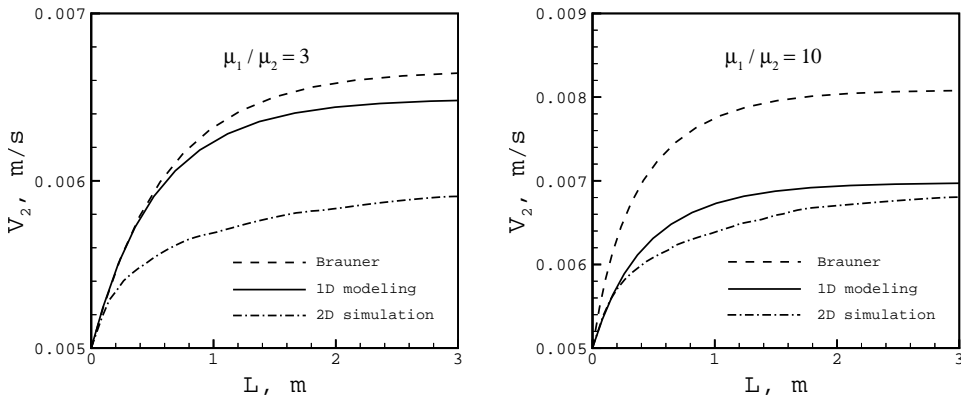


Рис. 5: Сравнение изменения средней скорости воды $v_2(x)$ по длине горизонтального канала в системе нефть—вода по различным моделям

5 Результаты численных расчетов

Для интегрирования системы уравнений (1–2), использовалась численная схема, описанная в [5].

На Рис. 3 показано формирование профилей скоростей нефти и воды в установившемся расслоенном потоке по длине горизонтального канала в безразмерных координатах. Вязкости нефти и воды принимались равными $\mu_1 = 0.01$ Па·с и $\mu_2 = 0.001$ Па·с, а плотности — $\rho_1 = 800$ кг/м³, $\rho_2 = 1000$ кг/м³, соответственно. Длина и ширина канала равнялись $L = 3$ м и $h = 0.146$ м, соответственно. На входе в канал уровень нефти принимался равным $\eta_0 = 0.097$ м, а скорости фаз равнялись 0.005 м/с.

На Рис. 4 сравниваются два подхода в определении напряжений трения и показаны изменение межфазной границы и скоростей нефти и воды по длине плоской горизонтальной трубы в системе нефть–вода для канала длиной $L = 10$ м и начальными скоростями жидкостей $v = 0.007$ м/с. Здесь на входе жидкости занимали одинаковое сечение. Если сравнивать значения на выходе, то относительные погрешности величин η , v_1 , v_2 по полученным формулам равны, соответственно, примерно 14.3, 7.8, и 12.7 процентов по сравнению с общепринятыми соотношениями в определении напряжений на стенках и межфазной границе.

На Рис. 5 представлены изменения средней скорости воды по длине горизонтального канала для двух различных отношений вязкостей нефти и воды, когда на входе жидкости занимают одинаковые сечения. Остальные параметры такие же, как и в расчетах, показанных на Рис. 3. Результаты расчетов показывают, что модель гидравлического приближения предпочтительней двухжидкостной модели. Однако для более вязких нефтей расчетные кривые лучше согласуются с результатами прямого численного моделирования, по сравнению с расчетами для маловязких нефтей.

Список литературы

- [1] Valle A. Multiphase pipeline flows in hydrocarbon recovery // Multiphase science and technology. 1998. V. 10, № 1. P. 1–139.
- [2] Brauner N., Moalem Maron D. Two-phase liquid-liquid stratified flow // Physico-Chem. Hydrodynam. 1989. № 11. P. 487–506.

-
- [3] Brauner N., Moalem Maron D., Rovinsky J. Two-fluid model for stratified flows with curved interfaces // *Int. J. Multiphase Flow*. 1998. V. 24, №. 6. P. 975–1004.
 - [4] C. W. Hirt, B. D. Nicholls, Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries // *J. Comput. Phys*. 1981. V. 39. P. 201–225.
 - [5] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoeffler, Numerical Simulation in Fluid Dynamics // *SIAM monographs on mathematical modeling and computation*. 1998. 217 p.
 - [6] D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, S. Zaleski, Volume-of-Fluid Interface Tracking with Smoothed Surface Stress Methods for Three-Dimensional Flows // *J. Comput. Phys*. 1999. V. 152. P. 423–456.
 - [7] B. Lafaurie, C. Nardone, R. Scardovelli, A. Zaleski, G. Zanetti, Modelling Merging and Fragmentation in Multiphase Flows with SURFER // *J. Comput. Phys*. 1994. V. 113. P. 134–147.