



# О НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСФЕРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>

М. А. Ильгамов, Э. Ш. Насибуллаева, Д. В. Кондратьев

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Проводится сравнительный параметрический анализ системы уравнений, описывающей несферические колебания газового пузырька в несжимаемой идеальной жидкости при учете членов до второго порядка малости по амплитуде возмущения поверхности. Были проведены численные расчеты данной системы уравнений для различных параметров (начальное отклонение от сферы, амплитуда давления, начальный радиус) и для различных законов изменения приложенного давления.

**Ключевые слова:** газовый пузырек, идеальная несжимаемая жидкость, амплитуда возмущения, несферические колебания, устойчивость

---

## 1 Постановка задачи

Рассматривается одиночный газовый пузырек в безграничной идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho_l$ , который в равновесном состоянии имеет сферическую форму радиуса  $R_0$ . Под действием изменения давления в жидкости пузырек совершает колебания около своего начального положения. Если имеется сколь угодно малое отклонение от сферической формы, то при изменении давления в жидкости колебания пузырька происходят с нарушением сферической симметрии. Предполагается, что массовые силы отсутствуют и давление газа внутри пузырька изменяется адиабатически.

Форму поверхности пузырька будем принимать в виде эллипсоида вращения. В таком случае радиальная координата поверхности пузырька

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97912)

ка будет подчиняться закону:

$$r_s = R(t) + a(t)P(\cos \theta).$$

Здесь  $R(t)$  — радиус сферического пузырька,  $a(t)$  — амплитуда возмущения поверхности пузырька,  $P(\cos \theta)$  — полином Лежандра второй степени:

$$P(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}.$$

Предполагается, что

$$|a(t)/R(t)|^3 \sim \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей.

Тогда несферические колебания пузырька описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $R(t)$  и  $a(t)$  [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{1}{45} \frac{a^2}{R^2} \right) \dot{R}^2 - \frac{13}{15} \frac{a}{R} \dot{R}\dot{a} + \frac{7}{30} \dot{a}^2 = \\ \quad = \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R} \left( 1 - 2 \frac{a^2}{R^2} \right) \\ \ddot{a} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a} + \left( \frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R} \right) a - \frac{2\dot{a}^2}{7R} - \frac{8\dot{R}}{7R^2} a\dot{a} - \frac{4}{7} \left( \frac{6\ddot{R}}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^3} + \frac{3\sigma}{\rho_l R^4} \right) a^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

В случае малых возмущений поверхности, когда вместо условия (1) выполняется условие:

$$|a(t)/R(t)|^2 \sim \varepsilon,$$

из (2) имеем систему уравнений [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R} \\ \ddot{a} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a} + \left( \frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R} \right) a = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Предполагаем, что давление газа внутри пузырька подчиняется адиабатическому закону. Тогда получим следующее выражение для давления газа в пузырьке:

$$p_1 = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left( 1 - \frac{3}{5} \gamma \frac{a^2}{R^2} \right) \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma}. \quad (4)$$

Давление жидкости на бесконечности  $p_\infty$  будет задаваться в следующих параграфах исходя из различных законов нагружения.

Начальные условия для нахождения функций  $R(t)$  и  $a(t)$ :

$$R(0) = R_0, \quad \dot{R}(0) = 0; \quad a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$

Величина  $\delta = a_0/R_0$  является малой по сравнению с единицей. Таким образом, считаем, что в начальный момент времени есть малое отклонение поверхности от сферичности.

## 2 Зависимость интенсивности колебаний от начального отклонения от сферы

Пусть система пузырек—жидкость выводится из состояния покоя путем изменения давления жидкости скачком:

$$p_\infty = p_0 + \Delta P, \quad (5)$$

где  $p_0$  — начальное давление,  $\Delta P$  — величина изменения давления в жидкости в момент времени  $t = 0$ .

В данном разделе приведем результаты анализа влияния начального отклонения поверхности пузырька от сферы, то есть для различных значений параметра  $\delta$ .

Для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка использовался метод Рунге—Кутты, основанный на формулах Дормана—Принса с автоматическим выбором шага [3]. Бралась следующие значения физических параметров:  $\rho_l = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 0.073$  Н/м,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\gamma = 1.4$ . Начальный радиус пузырька принимался равным  $R_0 = 5$  мкм.

На Рис. 1 показаны нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  при изменении давления жидкости в момент  $t = 0$  скачком на величину  $\Delta P = 0.27 \cdot 10^5$  Па для разных значений  $\delta = 10^{-1} \div 10^{-6}$ . Сплошной линией изображены функции, рассчитанные по нелинейной системе уравнений (2), пунктирной линией — функции, рассчитанные по системе уравнений (3).

Видно, что наибольшие отличия имеют место в случае  $\delta = 10^{-1}$  как для сферического движения, так и для амплитуды возмущения (максимальное значение  $a(t)/R_0$  здесь больше, чем для остальных случаев). Когда  $\delta = 10^{-3} \div 10^{-8}$  максимальные и минимальные значения функции  $R(t)$  остаются постоянными в каждом периоде колебания пузырька.

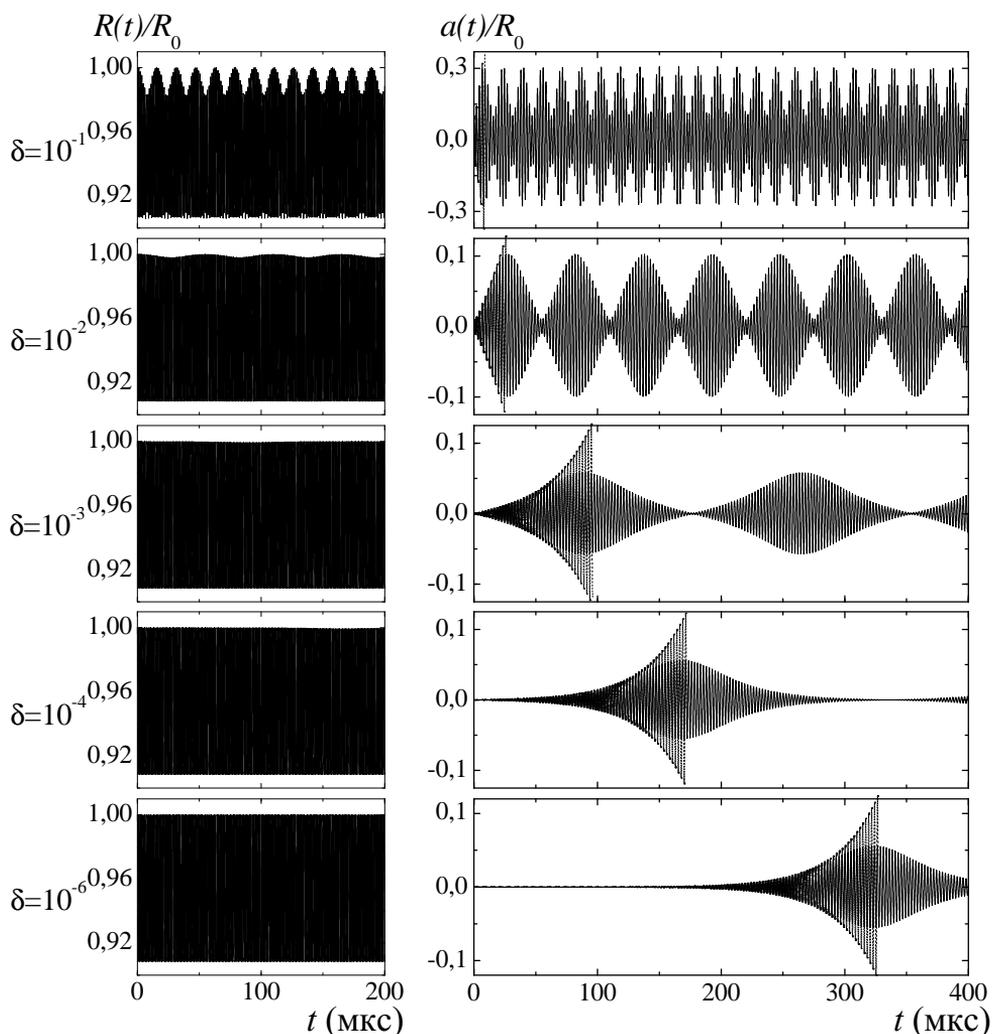


Рис. 1: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для различных безразмерных начальных отклонений от сферы  $\delta$  ( $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0.27 \cdot 10^5$  Па). Экспоненциально возрастающее решение (пунктирные линии) – решение системы уравнений (3)

Практически не меняются и максимальные отклонения функции  $a(t)$ . Это продемонстрировано на Рис. 2, где изображен нормированный глобальный максимум  $|a_{max}/R_0|$  амплитуды возмущения в зависимости от  $\delta$ . Относительная погрешность  $\left| \frac{a_{max1} - a_{max2}}{a_{max1}} \right| \cdot 100\%$ , когда, например,

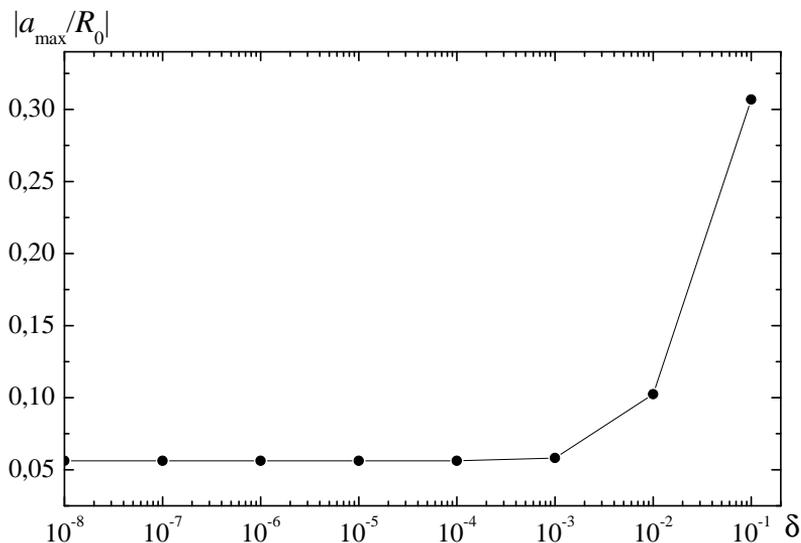


Рис. 2: Зависимость максимального значения функции  $a(t)/R_0$  от начального отклонения от сферы  $\delta$  ( $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0,27 \cdot 10^5$  Па)

$a_{max1}$  – это максимальное значение функции  $a(t)$  в случае  $\delta = 10^{-6}$ , а  $a_{max2}$  – в случае  $\delta = 10^{-3}$ , равна  $\approx 3,5\%$ . При малых  $\delta$  меняется только масштаб времени, на котором достигается этот глобальный максимум. При этом частота биений становится меньше. Объясняется это тем, что с уменьшением начального отклонения поверхности от сферичности момент времени, когда начинает сказываться влияние нелинейных членов, настает позже. На Рис. 1 видно, что при меньших значениях  $\delta$  функции, рассчитанные по системам уравнений (2) и (3), совпадают в течение большего промежутка времени, когда эти функции возрастают по экспоненте.

Таким образом, от величины начального отклонения от сферической формы зависят как время возрастания несферических колебаний пузырька и их амплитуды, так и частота биений. При этом частоты несферических и сферических колебаний практически не зависят от нее. Указанное выше время возрастания удовлетворительно определяется из системы уравнений Плессета. Начиная от значения безразмерного отклонения, равного  $\delta = 10^{-3}$ , характер изменения функции  $a(t)$  с дальнейшим уменьшением  $\delta$  не меняется, уменьшается лишь частота биений.

### 3 Зависимость интенсивности колебаний от приложенного давления

В данном разделе проведем сравнение несферических колебаний пузырька для пяти различных законов приложенного давления:

- а) заданное формулой (5);  
 б)  $p_\infty = p_0 - \Delta P$ ,  $t \in [0, \infty]$ ;  
 в)  $p_\infty = \begin{cases} p_0 - \Delta P \sin(\omega t), & t \in [0, T/2] \\ p_0, & t > T/2 \end{cases}$ ; (6)  
 г)  $p_\infty = \begin{cases} p_0 - \Delta P \sin(\omega t), & t \in [0, T] \\ p_0, & t > T \end{cases}$ ;  
 д)  $p_\infty = p_0 - \Delta P \sin(\omega t)$ ,  $t \in [0, \infty]$ .

Здесь  $\omega$  – угловая частота (в расчетах бралось  $\omega = 2\pi \cdot 20$  кГц),  $T = 2\pi/\omega$  – период колебания внешнего давления.

На Рис. 3, 4 и 5 показаны нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  для этих законов приложенного давления соответственно при значениях параметра  $\Delta P/p_0 = 0.27, 0.7$  и  $1.1$ . Безразмерное начальное отклонение от сферы принималось равным  $\delta = 10^{-3}$ . Видно, что при относительно малом  $\Delta P$  наибольшее отклонение от сферических колебаний достигается, когда внешнее давление задается по а) (Рис. 3). При задании давления по законам б)–д) функция  $a(t)/R_0$  находится в промежутке  $[-\delta, \delta]$ . Можно говорить об устойчивости колебаний по сферической форме.

При  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па (Рис. 4) колебания в случае а) происходят с большой амплитудой и становятся нерегулярными. В некоторые моменты времени перестает выполняться условие (1), что приводит к накоплению ошибок и к остановке программы счета. В случаях г) и д) имеется небольшое увеличение максимальной амплитуды колебания функции  $a(t)$ . Также отсутствует влияние несферических составляющих колебаний на сферические (кроме случая нагружения а), когда  $a(t)$  становится большой).

Когда  $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$  Па (Рис. 5), картина усложняется. В случае а) сохраняется тенденция к возбуждению сильных несферических колебаний, отмеченная выше. Счет прекращается уже при  $t \approx 7.5$  мкс. Таким образом, после семи–восьми периодов сферических колебаний происходит резкая раскачка несферических колебаний, что приводит, как можно предположить, к разрушению пузырька.

В случае б) сферический радиус неограниченно растет. При этом с его увеличением амплитуда возмущения поверхности  $a(t)$  стремится к нулю,

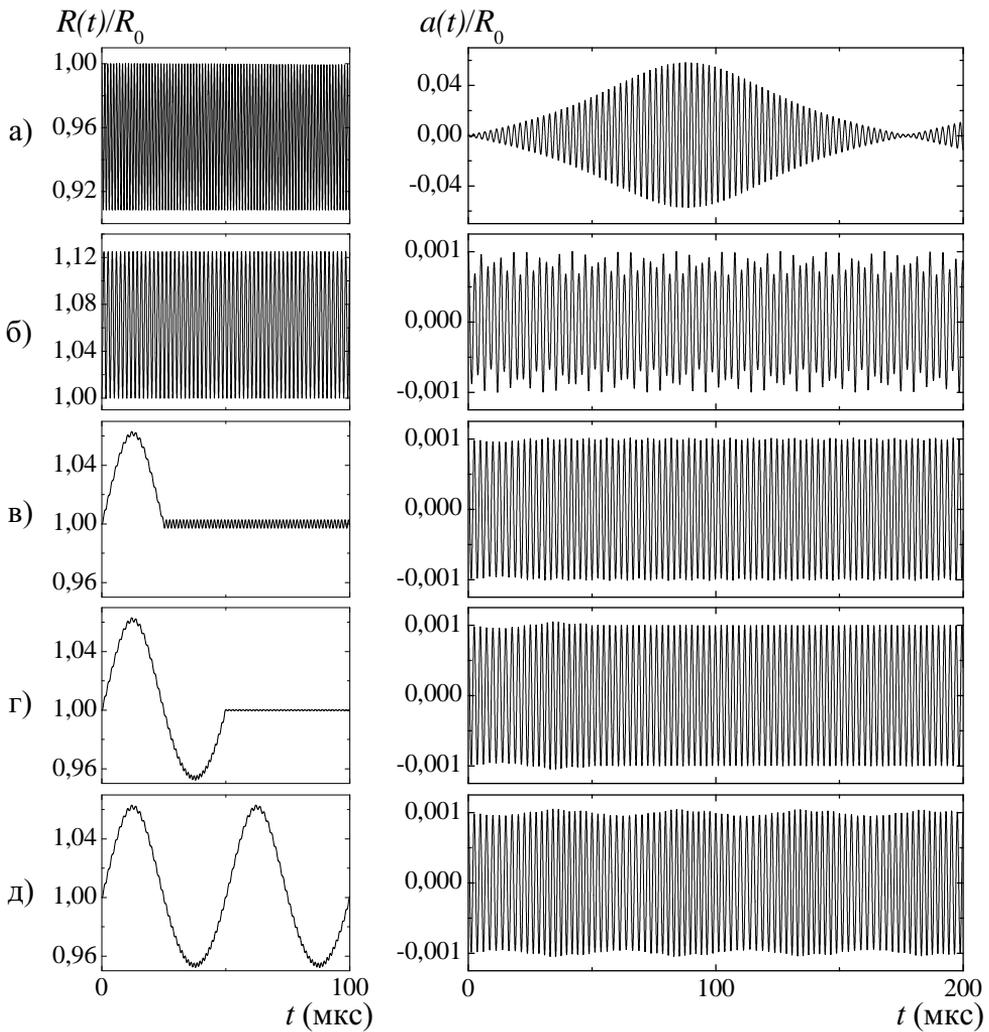


Рис. 3: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для различных видов изменения давления  $p_\infty$  при  $\Delta P = 0.27 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$ . Изменение давления в жидкости по времени задано в (6)

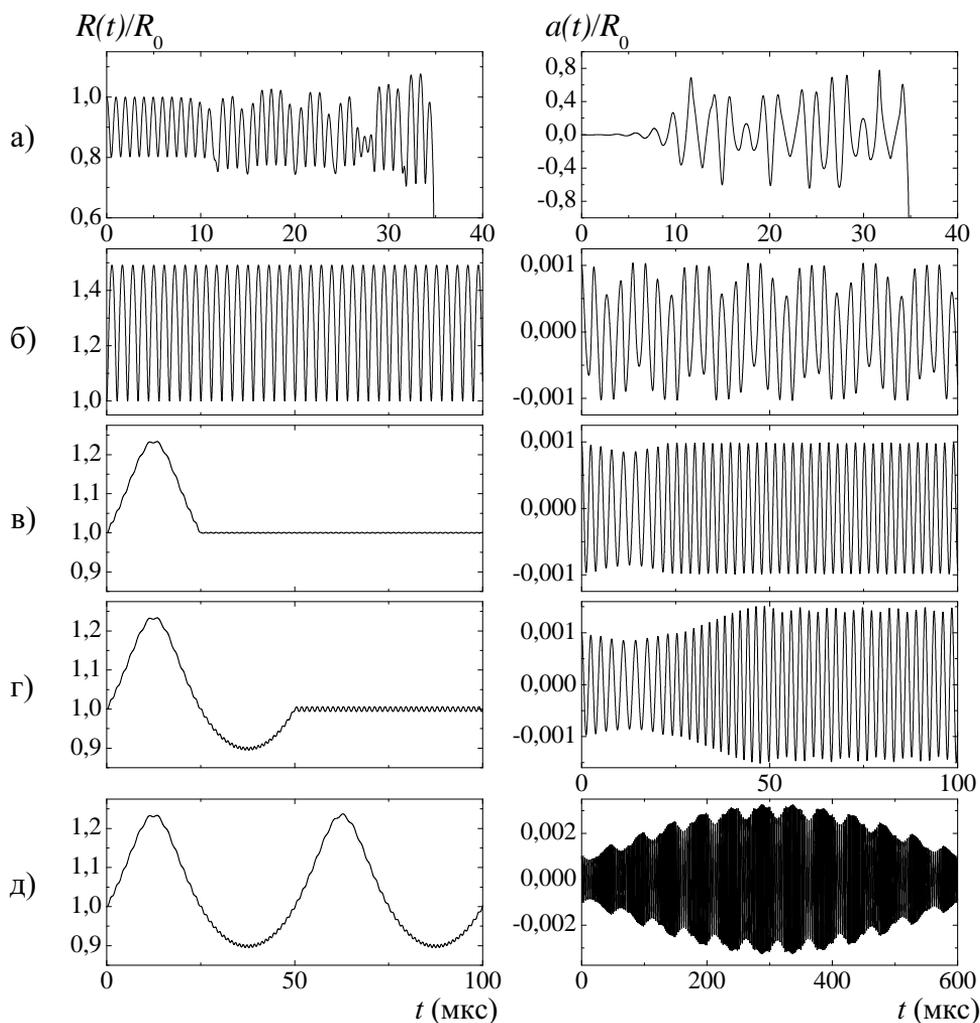


Рис. 4: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для различных видов изменения давления  $p_\infty$  при  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$

то есть с расширением пузырек стремится к своей сферической форме.

Случай в) рассмотрим подробнее в следующем разделе. Отметим, что счет прекращается до того, как внешнее давление совершит полный период колебания, поэтому функции для случаев г) и д) (Рис. 5) совпадают.

На Рис. 6 показаны графики этих же функций при меньшем значе-

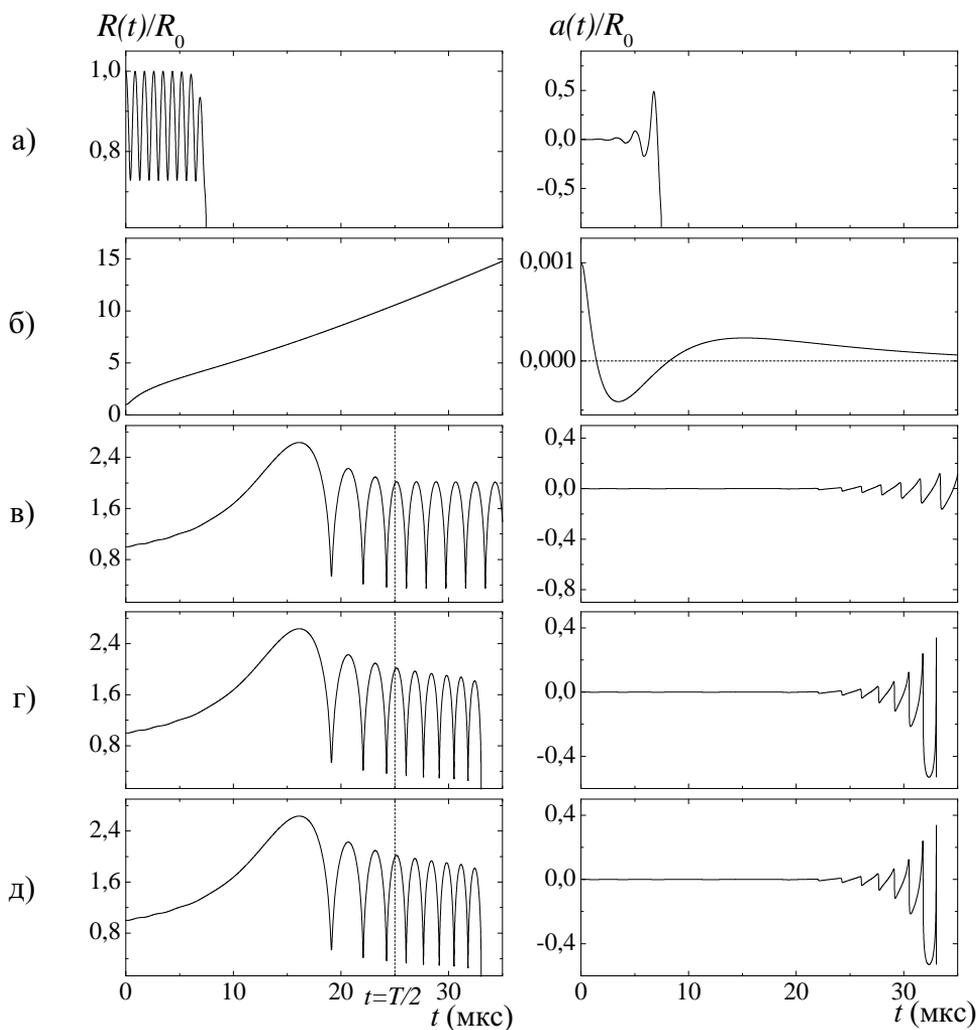


Рис. 5: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для различных видов изменения давления  $p_\infty$  при  $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$

нии  $\Delta P = 1 \cdot 10^5$  Па только для случаев г) и д) для того, чтобы показать их различия при  $t > T$ . Видно, что при  $t > T$  в случае г), когда внешнее давление остается постоянной величиной, функции  $R(t)$  и  $a(t)$  становятся периодическими и не растут со временем. Таким образом, в этом случае имеют место устойчивые несферические колебания большой амплитуды ( $a/R_0 \approx 0.4$ ). Для случая д), когда внешнее давление

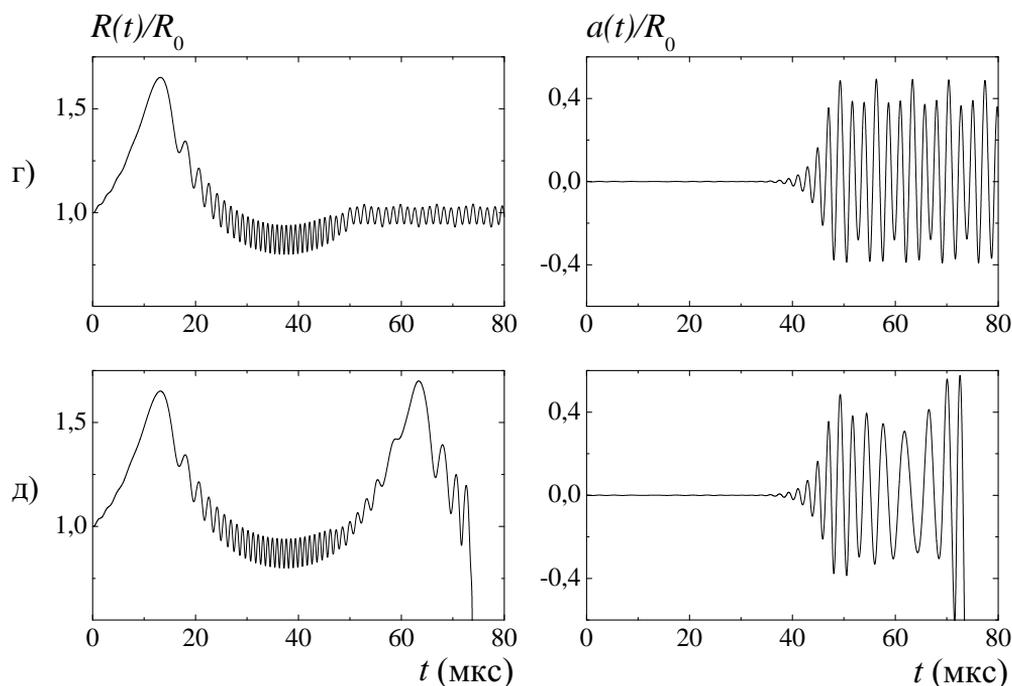


Рис. 6: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для давления  $p_\infty$ , изменяющегося по законам г) и д) формулы (6), при  $\Delta P = 1 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$

продолжает меняться по периодическому закону, функция  $a(t)$  изменяется неперiodически и сильный рост ее к моменту  $t \approx 70$  мкс приводит к остановке программы. Из графика  $a(t)/R_0$  видно, что при росте радиуса сферы (увеличение  $R(t)/R_0$ ) возрастает и период несферических колебаний (около  $t = 55 \div 70$  мкс).

На Рис. 7 показаны графики для случая д) при  $\Delta P = 0.99147 \cdot 10^5$  Па. Видно, что в первом сферическом колебании, когда амплитуда возмущения мала и не влияет на функцию  $R(t)$ , пузырек устойчив. Во втором колебании  $R(t)$  достигается большая раскочка, которая имеет характер параметрических колебаний. В третьем колебании  $R(t)$  увеличение амплитуды  $a(t)$  приводит к остановке программы. Отметим, с возрастанием несферических составляющих колебаний при уменьшении сферического радиуса  $R(t)$  (второй и начало третьего периода колебаний на Рис. 7) заметно более сильное изменение давления в пузырьке  $p_1(t)$  (в соответ-

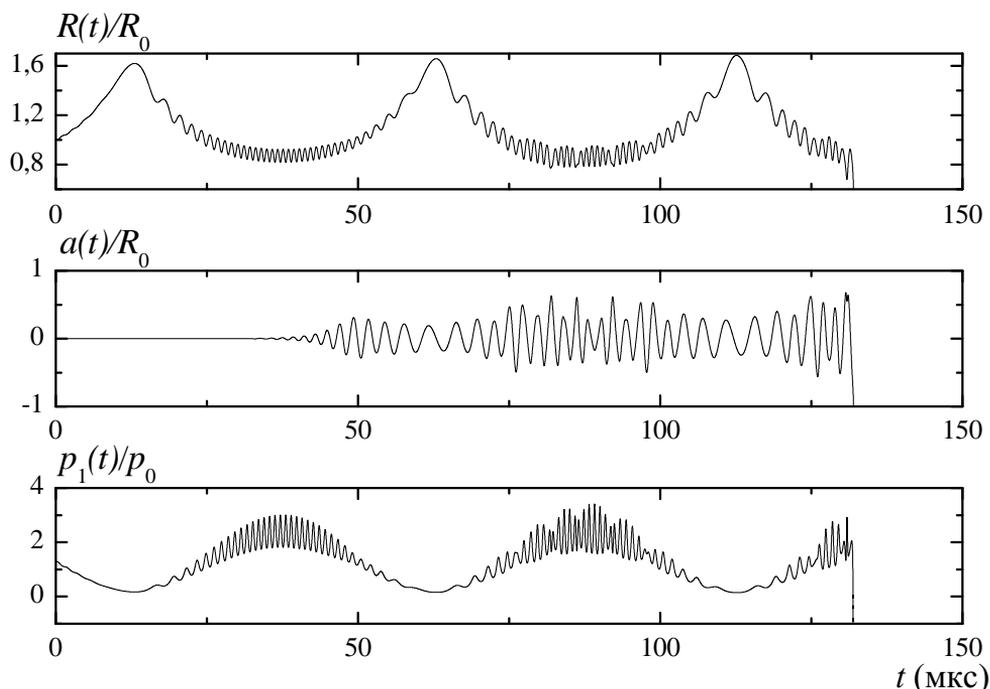


Рис. 7: Нормированные функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R_0$  и  $p_1(t)/p_0$  в зависимости от времени для давления  $p_\infty$ , изменяющегося по закону д) формулы (6), при  $\Delta P = 0.99147 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$

ствии с (4)).

#### 4 Устойчивость сферической поверхности пузырька при его сильном сжатии

На Рис. 5(в)–(г) пунктирной линией показан момент времени  $t = T/2$ . До этого момента функции  $R(t)$ , а также  $a(t)$ , для каждого рассматриваемого случая совпадают. Видно, что с течением времени амплитуда возмущения поверхности  $a(t)$  становится больше, причем при каждом последующем сжатии максимальное значение амплитуды возмущения увеличивается. Как указывалось выше, вопрос об устойчивости поверхности связан с амплитудой возмущения  $a(t)$ .

Существуют различные виды неустойчивости поверхности колеблющегося пузырька (см., например, работу [4]), основными из которых яв-

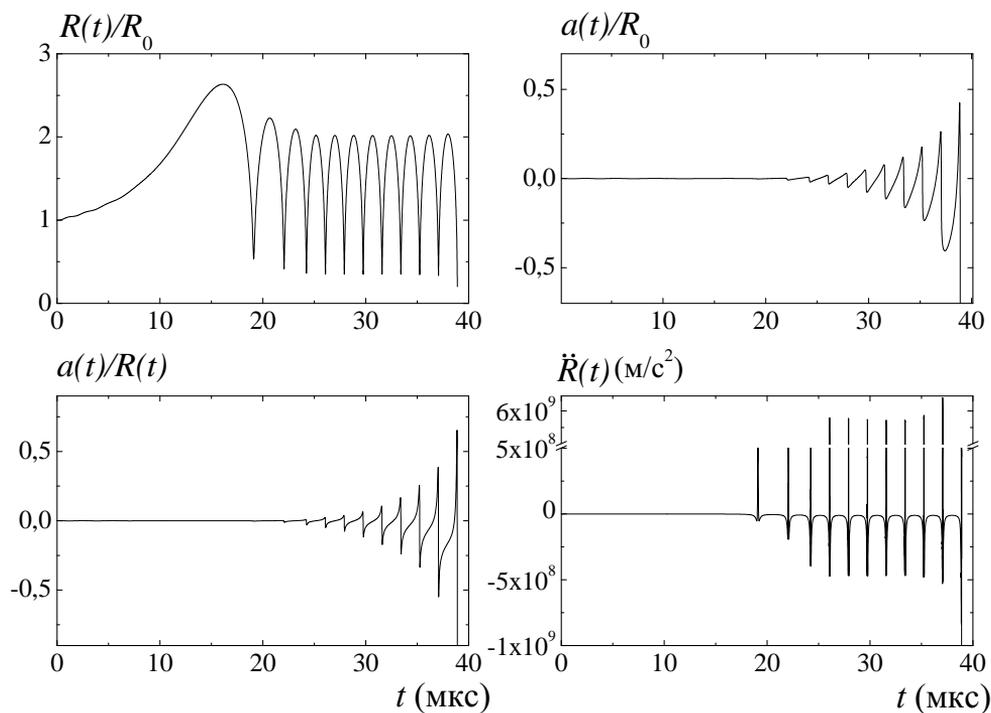


Рис. 8: Функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R(t)$ ,  $a(t)/R_0$  и  $\ddot{R}$  в зависимости от времени для случая в) при  $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$  Па

ляются параметрическая неустойчивость и неустойчивость Тейлора. Последняя имеет место, когда ускорение направлено от менее плотной к более плотной жидкости [5] (в нашем случае — от газа к жидкости), то есть когда ускорение поверхности раздела положительно ( $\dot{R} > 0$ ). Параметрическая неустойчивость имеет место, когда система за много периодов колебаний накапливает возмущения поверхности (начиная от начального отклонения  $a_0$ ), что при сильном росте может привести к разрушению пузырька. Вопрос об определении типа неустойчивости является отдельным вопросом, представляющим большой интерес, и требует более детального исследования. Поэтому в данном разделе рассмотрим только вид функций  $a(t)$ , характеризующих пузырек при его неустойчивых колебаниях.

На Рис. 8 показан более подробно случай в), где приведены также функции  $a(t)/R(t)$  и  $\ddot{R}$ . При значительных изменениях текущего радиуса  $R(t)$  более показательным может быть отклонение  $a(t)/R(t)$ , чем

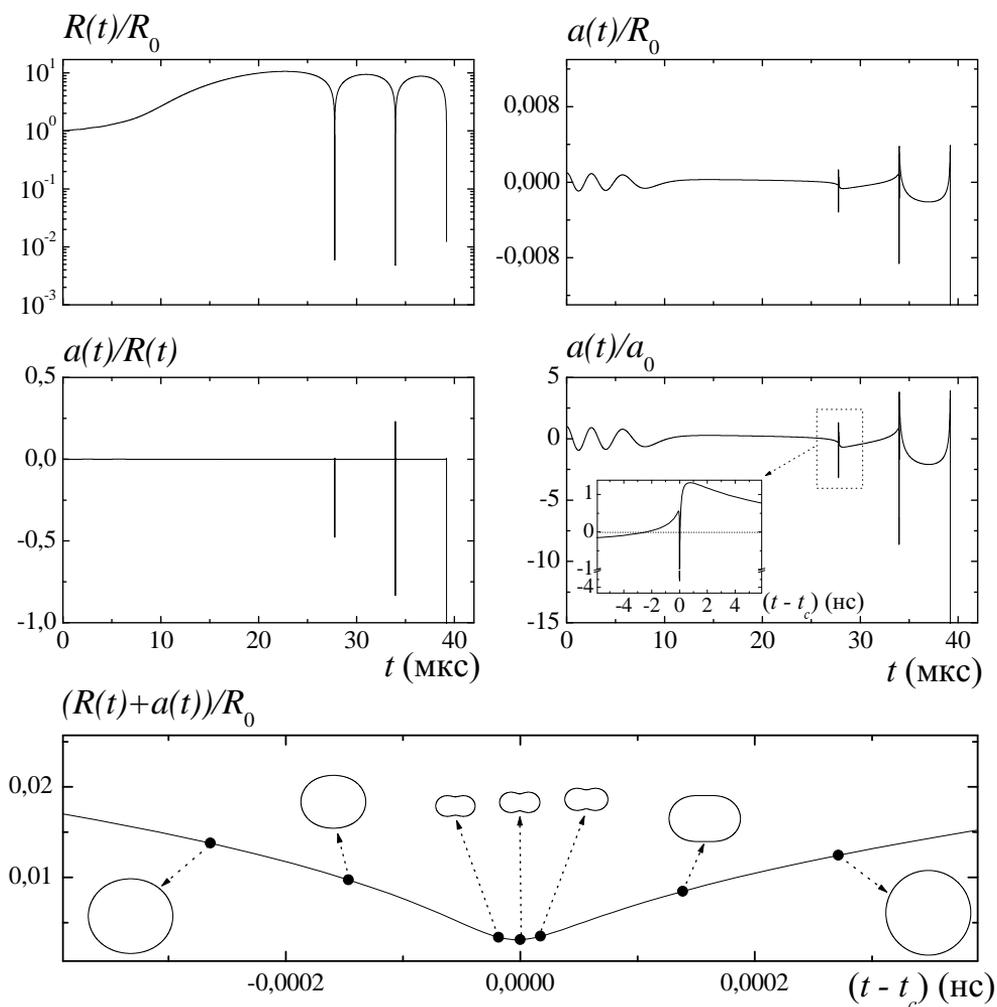


Рис. 9: Функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R(t)$ ,  $a(t)/R_0$  и  $a(t)/a_0$  в зависимости от времени  $t$ , а также функция  $(R(t) + a(t))/R_0$  в зависимости от относительного времени  $t - t_c$  ( $t_c = 27.7651811$  мкс) для случая г) при  $\Delta P = 1.35 \cdot 10^5$  Па

$a(t)/R_0$ , как до сих пор приводились на всех рисунках. Видно, что рост амплитуды возмущения происходит именно тогда, когда  $\ddot{R} > 0$  (резкое торможение движущейся к центру пузырька поверхности раздела). Хотя это выполняется в течение малого промежутка времени, но этот вклад может оказаться достаточным для того, чтобы развилась неустой-

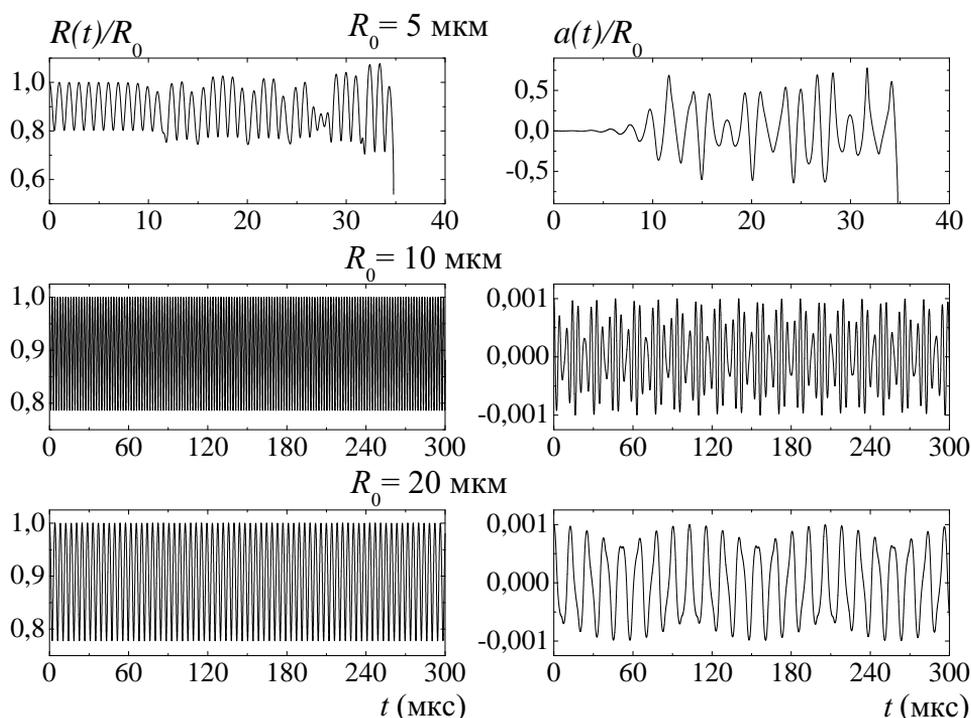


Рис. 10: Нормированные функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени для различных начальных радиусов  $R_0 = 5, 10$  и  $20$  мкм при изменении давления по (5) с данными  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$

чивость поверхности. В данном случае возникающая неустойчивость может быть либо параметрической, либо ее комбинацией с неустойчивостью Тейлора. Роль последней может возрастать для более высоких форм несферических колебаний.

На Рис. 9 показан случай внешнего давления  $\gamma$ ) из формул (6) при значении  $\Delta P = 1.35 \cdot 10^5$  Па. Как уже отмечалось выше (Рис. 5), при радиальном расширении пузырька, имеющиеся несферические колебания затухают. Это видно и по графикам  $a(t)/R_0$  и  $a(t)/a_0$  на Рис. 9. В моменты схлопывания происходит кратковременное усиление несферического движения. Здесь более детально изображен график функции  $a(t)/a_0$  в момент первого схлопывания в наносекундах. На нижнем графике приведена функция  $(R(t) + a(t))/R_0$ , что показывает изменение верхней точки поверхности пузырька со временем в окрестности того же первого коллапса, а также показано изменение формы пузырька в

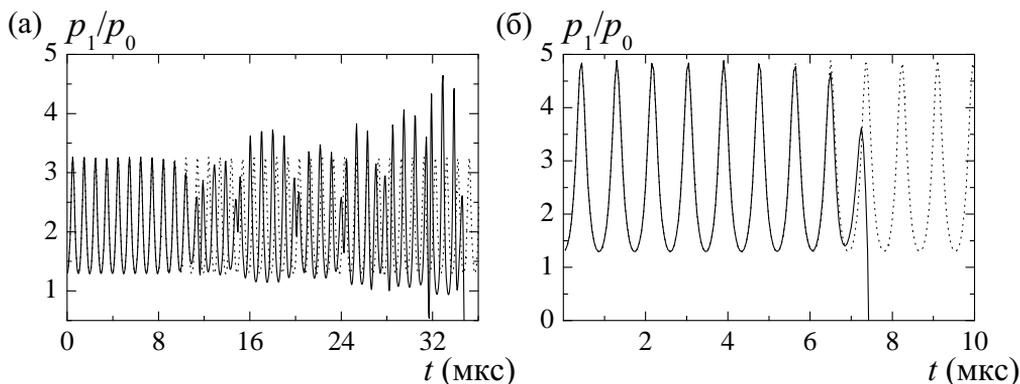


Рис. 11: Нормированные функции  $p_1(t)/p_0$  в зависимости от времени при несферических колебаниях (сплошные линии) и при сферических колебаниях (пунктирные линии) для внешнего давления, заданного формулой (5), в случаях (а)  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па и (б)  $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$  Па

интервале менее одной пикосекунды. В момент наибольшего сжатия пузырька происходит сплющивание, затем быстрый переход в небольшое вытянутое состояние и восстановление его сферической формы. При следующем схлопывании эта картина в основном повторяется, но с большими отклонениями от сферичности. В отличие от случая, разобранный выше (Рис. 8), здесь сжатие пузырька значительно больше (отличается почти в 100 раз от начального).

## 5 Зависимость интенсивности несферических колебаний от начального радиуса пузырька

На Рис. 10 приведены графики функций  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  для различных значений начального сферического радиуса  $R_0 = 5, 10$  и  $20$  мкм, когда внешнее давление изменяется по закону (5) с фиксированными величинами  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па и  $\delta = 10^{-3}$ . Видно, что в рассматриваемом случае по принятой модели увеличение начального радиуса пузырька приводит к стабилизации колебаний его поверхности. Это следует из результата: при начальном радиусе  $R_0 = 5$  мкм имеются большие несферические колебания поверхности, а для пузырьков с начальными радиусами  $R_0 = 10$  мкм и  $R_0 = 20$  мкм функция  $a(t)/R_0 \in [-\delta, \delta]$ , то есть амплитуда возмущения поверхности в последних двух случаях остается ограниченной с течением времени. Чтобы выявить природу этого явле-

ния нужно провести более тщательное исследование при разных частотах возбуждения.

## 6 Сравнение параметров в пузырьке при сферическом и несферическом сжатии

Сравнение давления газа в пузырьке  $p_1$  по формуле (4) при сферическом и несферическом колебании пузырька с начальным радиусом  $R_0 = 5$  мкм проводится для различных значений изменения давления  $\Delta P$ . Анализ показывает, что при малых несферических колебаниях поверхности практически нет различий между двумя режимами.

На Рис. 11 приведены графики при относительно больших колебаниях поверхности для величины изменения внешнего давления (а)  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па и (б)  $\Delta P = 1.1 \cdot 10^5$  Па. С некоторого момента времени функции  $p_1(t)$  в случаях сферических и сферическо–несферических колебаниях пузырька перестают совпадать. Это означает, что имеются заметные различия в изменении давления газа в пузырьке при сферическом и несферическом сжатии при данных режимах колебаний.

## 7 Заключение

Проведен сравнительный параметрический анализ для нелинейной системы уравнений, описывающей несферические колебания газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости. Установлено, что с увеличением начального отклонения поверхности пузырька от сферы несферические колебания его происходят с большей амплитудой, возникают раньше, а биения имеют большую частоту. При уменьшении начального отклонения достаточно брать безразмерное начальное отклонение от сферы  $\delta = a_0/R_0 = 10^{-3}$ . Дальнейшее уменьшение данного параметра не приводит к значительному изменению характера колебания пузырька (кроме частоты биения), но требует более значительной затраты времени расчета.

Сравнение колебаний для различных видов приложенного давления в жидкости показывает, что более глубокое сжатие пузырька при устойчивых колебаниях, имеющих место при небольшом значении  $\Delta P$ , дает давление, заданное формулой (5). При больших значениях  $\Delta P$  более глубокое сжатие имеет место в случаях в)–д) по формулам (6). При коллапсе развивается неустойчивость сферической формы, которая в

дальнейшем может приводить к разрушению пузырька. При увеличении начального радиуса пузырька при одной и той же частоте внешнего возбуждения наблюдается тенденция к стабилизации колебаний поверхности. Наличие несферической составляющей колебаний приводит к изменению максимальных значений колебаний давления в пузырьке.

Учет сжимаемости и вязкости жидкости может значительно изменить полученные здесь результаты.

Авторы благодарны Р. И. Нигматулину, А. А. Аганину и участникам семинара Института механики УНЦ РАН за обсуждение результатов.

## Список литературы

- [1] Ильгамов М. А., Насибуллаева Э. Ш. Нелинейный аналог уравнения Плессета для несферического движения газового пузырька // Труды Института механики УНЦ РАН. 2003.
- [2] Plesset M. S. On the stability of the fluid flow with spherical symmetry // J. Appl. Math. 1954. V. 25, № 1.
- [3] Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [4] Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M. P. Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // Phys. Fluids. 1996. V. 8. P. 2808; V. 9. P. 2462(E).
- [5] Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Roy. Soc. 1950. V. A201. P. 192.