



# НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ПЛЕССЕТА ДЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА<sup>1</sup>

*М. А. Ильгамов, Э. Ш. Насибуллаева*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Выводится уравнение, аналогичное уравнению Плессета, которое описывает несферические движения газового пузырька в идеальной несжимаемой жидкости. Принимались во внимание члены, содержащие квадраты амплитуды несферического возмущения, в то время как при выводе уравнения Плессета учитываются только линейные члены. На основе полученных уравнений были проведены численные расчеты несферических колебаний пузырька. Сравнение с результатами, полученными по уравнению Плессета, показало, что при достаточном увеличении амплитуды возмущения начинают сказываться нелинейные члены, которые ограничивают решение.

**Ключевые слова:** пузырек, идеальная несжимаемая жидкость, полином Лежандра, метод Бубнова-Галеркина, амплитуда возмущения

---

## 1 Постановка задачи

В равновесном состоянии одиночный газовый пузырек в безграничной идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho_l$  имеет сферическую форму радиуса  $R_0$ . Под действием изменения давления в жидкости пузырек начинает колебаться около своего начального положения, при этом допускается нарушение сферической симметрии. Предполагается,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-00-234)

что массовые силы отсутствуют и давление газа внутри пузырька изменяется адиабатически. Состояние вопроса отражено в монографиях и обзорных работах [1–5].

Из уравнения неразрывности для потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости получаем уравнение Лапласа для потенциала скорости  $\Delta\phi = 0$ . Решение данного уравнения выражается в сферических функциях, использующиеся в случаях, когда граничные условия отнесены к сферическим или близким к сферическим поверхностям (см., например, [6, 7]). В данной работе рассматриваются именно такие поверхности. В сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  с началом отсчета в центре пузырька уравнение Лапласа имеет вид:

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения, ограниченное во всей области, занятой жидкостью, можно записать в виде:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi),$$

где  $Y_n(\theta, \varphi)$  — поверхностная сферическая гармоника порядка  $n$ . В случае, когда нет зависимости от угла  $\varphi$ , функции  $Y_n(\theta, \varphi)$  выражаются через полиномы Лежандра  $P_n(\cos\theta)$  следующим образом:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{d(\cos\theta)^n} [(\cos^2\theta - 1)^n].$$

Тогда потенциал скорости принимает вид:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\theta). \quad (2)$$

Постоянные  $B_n$  определяются из условия на поверхности контакта жидкости и газа.

Рассмотрим форму отклонения поверхности пузырька от сферы в виде эллипсоида вращения (Рис. 1). В таком случае возмущение поверхности пузырька будет подчиняться закону  $r = r_s(\theta, t)$ , где

$$r_s = R(t) + a(t)P(\cos\theta). \quad (3)$$

Здесь  $R(t)$  — радиус сферического пузырька,  $a(t)$  — амплитуда возмущения поверхности пузырька,  $P(\cos\theta)$  — полином Лежандра второй степени

$$P(\cos\theta) = \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2}. \quad (4)$$

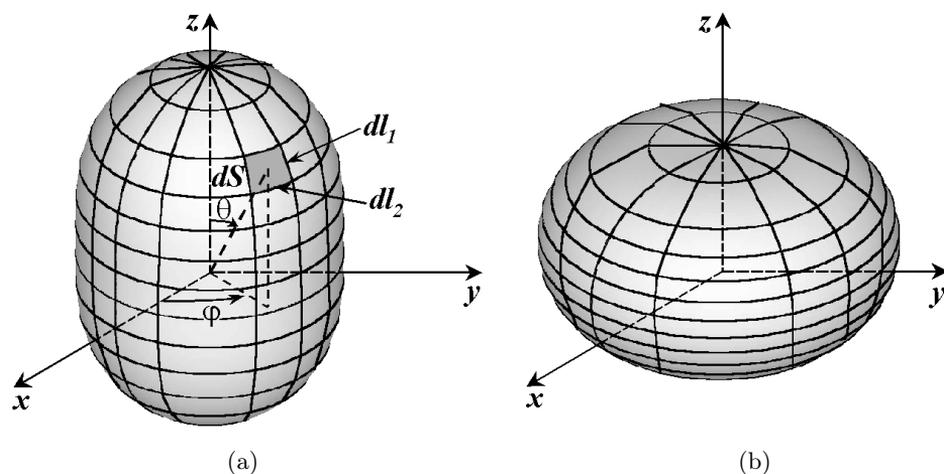


Рис. 1: Искаженная поверхность пузырька единичного радиуса для функции  $r_s$ , взятой в виде (a)  $r_s = 1 + 0.3P(\cos \theta)$ , (b)  $r_s = 1 - 0.3P(\cos \theta)$

Принимаем, что

$$|a(t)/R(t)|^3 \sim \varepsilon, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  — величина, которой можно пренебречь по сравнению с единицей. В дальнейшем в соответствии с этой оценкой будем пренебрегать членами  $a(t)/R(t)$  в степени выше второй.

В формуле для потенциала скорости жидкости (2) оставляем только нулевой и второй члены ряда:

$$\phi = \frac{1}{r}B_0 + \frac{1}{r^3}B_2P(\cos \theta). \quad (6)$$

Для определения констант  $B_0$  и  $B_2$  необходимо использовать кинематическое и динамическое условия на границе раздела газ—жидкость.

Скорость поверхности контакта жидкости и газа, спроектированная на нормаль (Рис. 2(a)), равна  $v_n = (\partial r_s / \partial t) \cos \beta$ .

Скорость жидкости по нормали на границе пузырька, выраженная через потенциал скорости  $\phi$ , примет вид:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{r=r_s} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \beta - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \sin \beta \right) \Big|_{r=r_s}.$$

Из условия равенства скоростей по нормали на поверхности пузырька ( $v_n = (\partial \phi / \partial n)|_{r=r_s}$ ) получим:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \beta - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \sin \beta \right) \Big|_{r=r_s} = \frac{\partial r_s}{\partial t} \cos \beta.$$

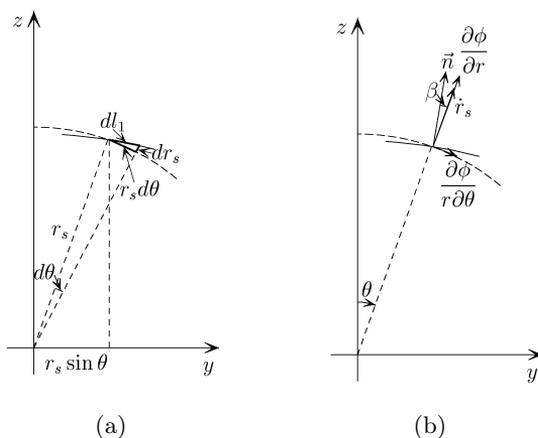


Рис. 2: Обозначения, используемые при (а) выводе кинематического граничного условия (7) и (b) расчете дуги  $dl_1$  (10)

Отсюда, с учетом того, что  $\text{tg } \beta = \partial r / r \partial \theta$ , получаем следующее кинематическое условие:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{r \partial \theta} \right) \Big|_{r=r_s} = \frac{\partial r_s}{\partial t}. \tag{7}$$

Динамическое условие на границе пузырька имеет вид:

$$p_2 = p_1 - \sigma \left( \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right), \tag{8}$$

где  $p_1$  — давление газа внутри пузырька,  $p_2$  — давление жидкости,  $R'$  и  $R''$  — главные радиусы кривизны поверхности,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

## 2 Вывод уравнения конечных искажений сферической формы пузырька

При выводе уравнения будем использовать метод Бубнова–Галеркина. Для этого необходимо найти элемент площади поверхности пузырька. На Рис. 1(а) показан элемент площади

$$dS = dl_1 \cdot dl_2. \tag{9}$$

Дуги  $dl_1$  и  $dl_2$  вычисляются по формулам (Рис. 2(b)):

$$dl_1 = \sqrt{(r_s d\theta)^2 + (dr_s)^2}, \quad (10)$$

$$dl_2 = r_s \sin \theta d\varphi. \quad (11)$$

С учетом оценки (5) представим (10) в виде:

$$dl_1 = r_s d\theta \sqrt{1 + \frac{1}{r_s^2} \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2} \approx r_s d\theta \left[1 + \frac{1}{2r_s^2} \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2\right]. \quad (12)$$

Подставим (11), (12) в (9) и с учетом (3) получим:

$$\begin{aligned} dS &= r_s^2 \sin \theta \left[1 + \frac{1}{2r_s^2} \left(\frac{dr_s}{d\theta}\right)^2\right] d\varphi d\theta \approx \\ &\approx \left(R^2 + 2RaP(\cos \theta) + a^2 P^2(\theta) + \frac{9}{8} a^2 \sin^2(2\theta)\right) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в условие (7) потенциал скорости жидкости (6), тогда с принятой точностью получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{9}{4} \frac{a}{R^5} \sin^2(2\theta) B_2 - \left(1 - 2\frac{a}{R} P(\cos \theta) + 3\frac{a^2}{R^2} P^2(\theta)\right) \frac{B_0}{R^2} - \\ - \frac{3}{R^4} \left(1 - 4\frac{a}{R} P(\cos \theta)\right) P(\cos \theta) B_2 = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} P(\cos \theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $B_0$  и  $B_2$  используем метод Бубнова–Галеркина. Для этого умножим уравнение (14) на элемент площади (13), а затем последовательно — на собственные функции 1 и  $P(\cos \theta)$ , и проинтегрируем по площади. С принятой точностью относительно  $a/R$  получим следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} B_0 &= -\left(R^2 + \frac{1}{5}a^2\right) \dot{R} - \frac{2}{5}Ra\dot{a}, \\ B_2 &= -\frac{2}{3}R^3a \left(1 - \frac{1}{7}\frac{a}{R}\right) \dot{R} - \frac{1}{3}R^4 \left(1 + \frac{2}{7}\frac{a}{R}\right) \dot{a}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6), получаем формулу для потенциала скорости, выраженный через  $R$  и  $a$  и их производные:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{r} \left[-\left(R^2 + \frac{1}{5}a^2\right) \dot{R} - \frac{2}{5}Ra\dot{a}\right] + \\ &+ \frac{1}{r^3} \left[-\frac{2}{3}R^3a \left(1 - \frac{1}{7}\frac{a}{R}\right) \dot{R} - \frac{1}{3}R^4 \left(1 + \frac{2}{7}\frac{a}{R}\right) \dot{a}\right] P(\cos \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Интеграл Бернулли в рассматриваемом случае имеет следующий вид (см., например, [7]):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 = -\frac{p_2 - p_\infty}{\rho_l}, \quad (17)$$

где  $p_2 = p_2(r)$  — давление жидкости,  $p_\infty$  — давление жидкости на бесконечности.

Для того, чтобы использовать динамическое граничное условие (8) необходимо найти среднюю кривизну  $H$  поверхности, которая определяется по формуле (см., например, [6]):

$$2H = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = r_s^2 + \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = r_s^2 \sin^2 \theta, \\ L &= \frac{|\vec{r}_{\theta\theta} \vec{r}_\theta \vec{r}_\varphi|}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{2 \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2 - r_s \frac{\partial^2 r_s}{\partial \theta^2} + r_s^2}{\sqrt{r_s^2 + \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2}}, \\ M &= \frac{|\vec{r}_{\theta\varphi} \vec{r}_\theta \vec{r}_\varphi|}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ N &= \frac{|\vec{r}_{\varphi\varphi} \vec{r}_\theta \vec{r}_\varphi|}{\sqrt{EG - F^2}} = -\frac{r_s \sin \theta \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \cos \theta - r_s \sin \theta \right)}{\sqrt{r_s^2 + \left( \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$x = r_s \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r_s \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r_s \cos \theta, \quad \vec{r} = (x, y, z).$$

Из формулы (18) следует, что удвоенная средняя кривизна поверхности во втором приближении по  $a/R$  равна:

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \approx \frac{1}{R} \left( 2 + 4 \frac{a}{R} P(\cos \theta) - 10 \frac{a^2}{R^2} P^2(\theta) \right). \quad (19)$$

После того, как левая часть уравнения (17) будет выражена через  $R$  и  $a$  на поверхности пузырька, подставим в его правую часть уравнение (8) и выражение (19). Полученное выражение проинтегрируем по методу Бубнова–Галеркина с использованием (4) и (13). При этом предполагаем, что  $p_1$  не зависит от угла  $\theta$ . Получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $R(t)$  и  $a(t)$ :

$$\begin{cases} R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{45} \frac{a^2}{R^2}\right) \dot{R}^2 - \frac{13}{15} \frac{a}{R} \dot{R}\dot{a} + \frac{7}{30} \dot{a}^2 = \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{5} \frac{a^2}{R^2}\right) \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R} \left(1 - 2 \frac{a^2}{R^2}\right) \\ \ddot{a} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a} + \left(\frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R}\right) a - \frac{2\dot{a}^2}{7R} - \frac{8\dot{R}}{7R^2} a\dot{a} - \frac{4}{7} \left(\frac{6\ddot{R}}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{R^3} + \frac{3\sigma}{\rho_l R^4}\right) a^2 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

В случае сферически симметричного движения пузырька имеем одно уравнение Рэлея–Плессета относительно радиуса пузырька (см., например, [7, 8]):

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R}. \quad (21)$$

В случае малых возмущений поверхности, когда вместо условия (5) выполняется условие

$$|a(t)/R(t)|^2 \sim \varepsilon, \quad (22)$$

к уравнению (21) добавляется уравнение Плессета [9] относительно амплитуды возмущения  $a(t)$ :

$$\ddot{a} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a} + \left(\frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R}\right) a = 0, \quad (23)$$

что является частным случаем системы уравнений (20): при отбрасывании в ней членов порядка  $a^2$  получается система уравнений (21), (23).

Округляя числовые коэффициенты при поправочных членах в системе уравнений (20), а также отбрасывая члены с малыми числовыми коэффициентами, находим следующую систему приближенных уравнений для радиуса пузырька и амплитуды возмущения:

$$\begin{cases} R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 - \frac{a}{R} \dot{R}\dot{a} + \frac{1}{4} \dot{a}^2 = \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{5} \frac{a^2}{R^2}\right) \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R} \left(1 - 2 \frac{a^2}{R^2}\right), \\ \ddot{a} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \dot{a} + \left(\frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R}\right) a - \frac{\dot{a}^2}{4R} - \frac{\dot{R}}{R^2} a\dot{a} - \left(\frac{3\ddot{R}}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{2R^3} + \frac{2\sigma}{\rho_l R^4}\right) a^2 = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Отбрасывая малые члены в (24), можно записать еще более приближенную систему уравнений:

$$\begin{cases} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - \frac{a}{R}\dot{R}\dot{a} + \frac{1}{4}\dot{a}^2 = \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R}, \\ \ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} + \left(\frac{12\sigma}{\rho_l R^3} - \frac{\ddot{R}}{R}\right)a - \frac{1}{4}\frac{\dot{a}^2}{R} - \frac{\dot{R}}{R^2}a\dot{a} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

### 3 Численные расчеты несферических колебаний пузырька

Для проведения численных расчетов несферических колебаний пузырька на основе системы уравнений (20) (или (24)) необходимо задать давление газа на стенке пузырька  $p_1$  и давление жидкости на бесконечности  $p_\infty$ .

Пусть система пузырек–жидкость выводится из состояния покоя путем изменения давления жидкости скачком, то есть давление жидкости на бесконечности задается следующим образом:

$$p_\infty = p_0 + \Delta P, \quad (26)$$

где  $p_0$  — начальное давление в жидкости,  $\Delta P$  — величина изменения давления.

Найдем объем пузырька  $V = V(t)$ . Объем тела, полученного вращением кривой, заданной на плоскости  $yz$  уравнением  $y = f(z)$ , вокруг оси  $z$ , находится следующим образом:

$$V = \pi \int_0^\pi y^2 dz.$$

В нашем случае  $y = r_s \sin \theta$ ,  $z = r_s \cos \theta$ . Следовательно, с учетом формулы (3) получим, что объем пузырька во втором приближении по  $a/R$  имеет вид:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{4}{5}\pi R a^2.$$

Предполагая, что давление газа внутри пузырька подчиняется адиабатическому закону, получим следующее выражение для давления газа на стенке пузырька:

$$p_1 = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \left(1 - \frac{3}{5}\gamma \frac{a^2}{R^2}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}. \quad (27)$$

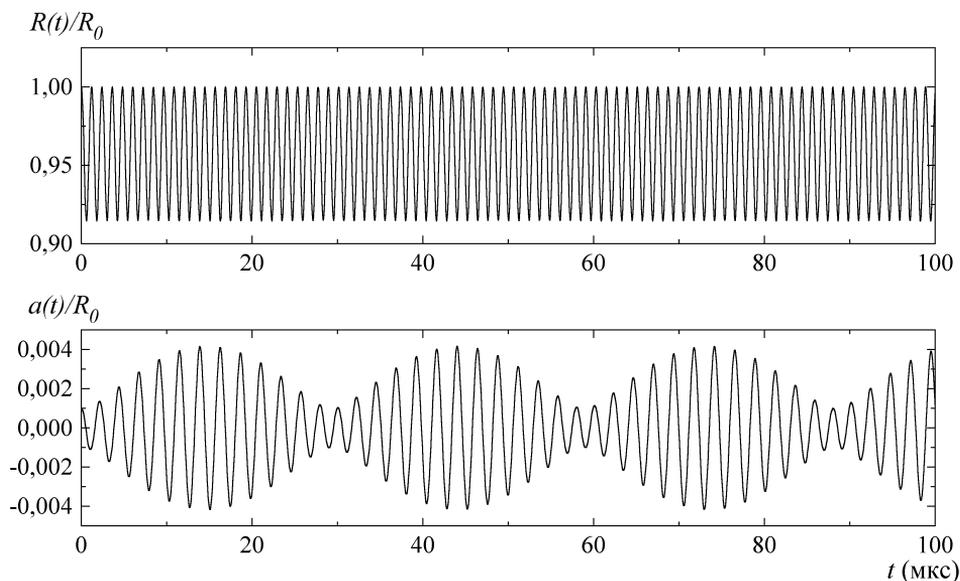


Рис. 3: Нормированные функции  $R(t)/R_0$  и  $a(t)/R_0$  в зависимости от времени в случае малых несферических колебаний поверхности пузырька ( $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0.25 \cdot 10^5$  Па)

Примем следующие начальные условия для нахождения функций  $R(t)$  и  $a(t)$ :

$$R(0) = R_0, \quad \dot{R}(0) = 0; \quad a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0.$$

Величина  $\delta = a_0/R_0$  является малой (в расчетах принято  $\delta = 10^{-3}$ ). Таким образом, считаем, что в начальный момент времени есть малое отклонение поверхности от сферичности.

Для расчета системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка использовался метод Рунге–Кутты, основанный на формулах Дормана–Принса с автоматическим выбором шага [10]. Использовались следующие значения физических параметров:  $\rho_l = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 0.073$  Н/м,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\gamma = 1.4$ .

При выполнении условия (5) (и тем более условия (22)), когда искажения поверхности малы, результаты, полученные с помощью системы уравнений (21), (23) и системы уравнений (20) полностью совпадают. Это имеет место в случае устойчивых колебаний пузырька, когда амплитуда искажения ограничена. На Рис. 3 приведен соответствующий график.

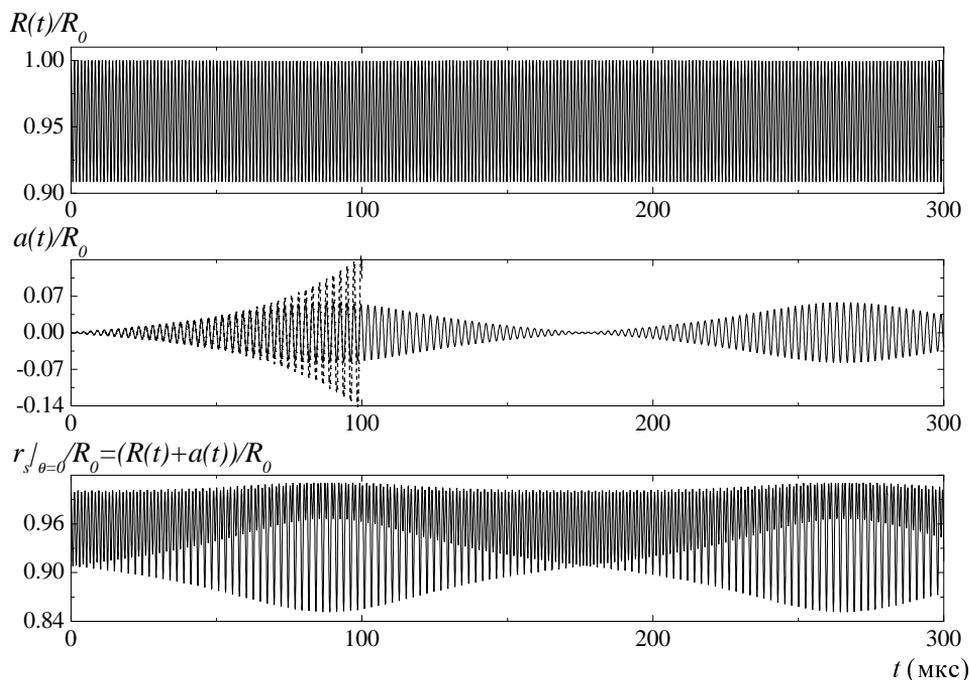


Рис. 4: Нормированные функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R_0$  и  $r_s/r_{s=0}|_{\theta=0}$  в зависимости от времени в случае малых несферических колебаний поверхности пузырька при стабилизирующем воздействии членов второго порядка по  $a/R$  ( $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0.27 \cdot 10^5$  Па). Пунктиром показано решение линейного уравнения (23)

Здесь рассматривался пузырек с  $R_0 = 5$  мкм под действием изменения давления, равного  $\Delta P = 0.25 \cdot 10^5$  Па.

Рассмотрим случай колебаний с большими амплитудами. На Рис. 4 показаны графики функций  $R(t)$  и  $a(t)$ , рассчитанные по формулам (21), (23) (пунктирная линия) и (20) (сплошные линии). До момента времени  $t \approx 60$  мкс значения функций, рассчитанные по различным уравнениям, совпадают. При  $t > 60$  мкс амплитуда возмущения  $a(t)$ , рассчитанная по уравнению Плессета, растет со временем по экспоненте, а амплитуда возмущения, рассчитанная по полученному в данной работе уравнению, остается ограниченной. При этом условие (5), а значит и условие (22), всегда выполняется. Таким образом, при данных параметрах учет нелинейных членов приводит к устойчивым колебаниям поверхности пузырька. На Рис. 4 изображено также, как меняется верхняя точка поверхности пузырька (в формуле (3) положено  $\theta = 0$ ) со временем.

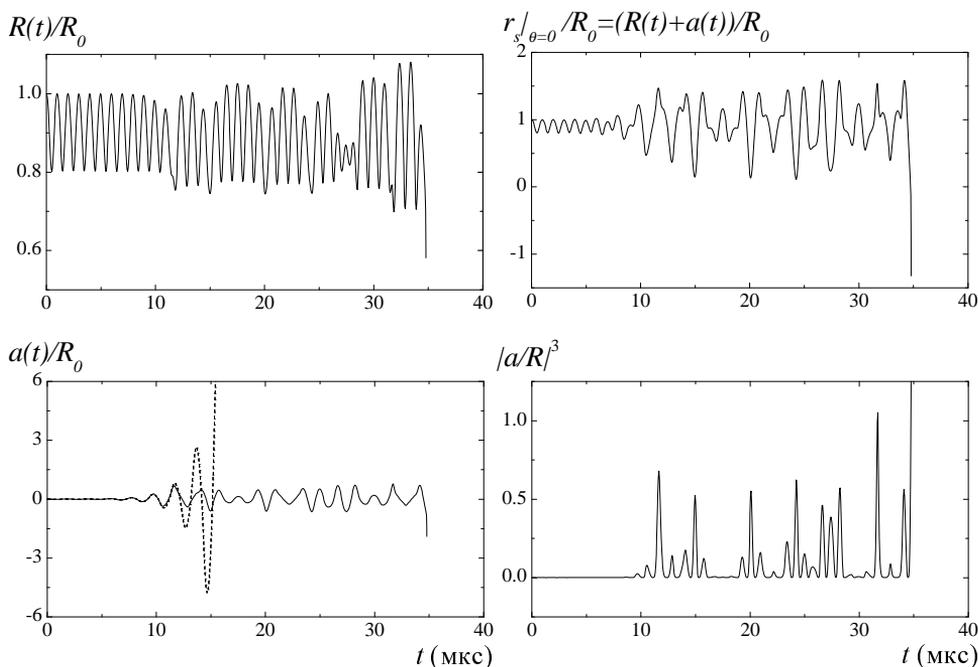


Рис. 5: Нормированные функции  $R(t)/R_0$ ,  $a(t)/R_0$  (слева),  $r_s/R_0|_{\theta=0}$  и условие (5)  $|a(t)/R(t)|^3$  (справа) в зависимости от времени в случае больших колебаний поверхности пузырька ( $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па). Пунктиром показано решение линейного уравнения (23)

На Рис. 5 продемонстрирован случай более высокого значения изменения внешнего давления  $\Delta P = 0.7 \cdot 10^5$  Па. Здесь до момента времени  $t \approx 10$  мкс нелинейные члены не влияют на характер колебания пузырька, поскольку выполняется условие (22). При  $t > 10$  мкс нелинейные члены начинают сказываться на изменении функции  $a(t)$ , при этом они начинают влиять также и на сферический радиус  $R(t)$ . Колебания становятся нерегулярными. При возрастании  $a(t)$  увеличивается и отношение  $|a/R|^3$  и с некоторого момента перестает выполняться условие (5), которое изображено на рисунке справа внизу. Продолжительность нарушения данного условия мала, но в эти промежутки времени функции рассчитываются неправильно, поэтому нельзя по ним судить о дальнейшем характере колебаний поверхности пузырька, тем более, что эти ошибки приводят в итоге к остановке программы расчета (при  $t \approx 35$  мкс). Отметим, что величина  $\delta$  в начальном условии оказывает влияние на значения, принимаемые функцией  $a(t)$ , но не на сам характер

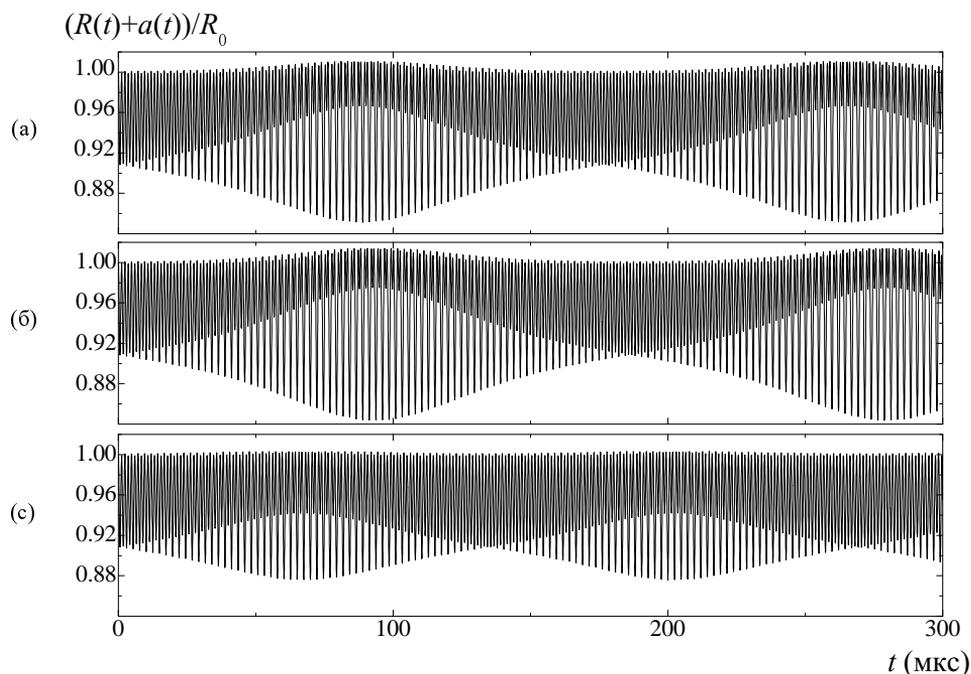


Рис. 6: Сравнение функции  $(R(t) + a(t))/R_0$ , рассчитанной: (а) — по системе уравнений (20), (б) — по упрощенной системе уравнений (24) и (в) — по упрощенной системе уравнений (25) при  $R_0 = 5$  мкм,  $\Delta P = 0.27 \cdot 10^5$  Па

изменения функции.

Колебания сферической формы устанавливаются сразу после приложения нагрузки. Что касается функции  $a(t)$ , то колебания с биениями устанавливаются только при малых амплитудах (Рис. 3 и 4). При больших амплитудах колебаний (Рис. 5) имеют место нерегулярные колебания. Отметим, что частота несферических колебаний пузырька в два раза меньше, чем частота его чисто радиальных колебаний.

Расчеты по полученной системе (20) и по упрощенным системам (24) и (25) показали, что для малых амплитуд нет отличий в этих функциях. При больших амплитудах со временем различия в функциях растут, однако эти различия не влияют на характер изменения функции  $a(t)$  (Рис. 6). Поэтому для приближенных оценок могут быть использованы упрощенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих несферические колебания пузырька, (24) и (25).

## 4 Заключение

При выводе уравнения Плессета (23), описывающего несферические колебания пузырька, учитываются только линейные члены для амплитуды искажения поверхности  $a(t)$ . На радиус сферического пузырька  $R(t)$  искажение поверхности не оказывает влияния, поэтому он находится из уравнения Рэлея–Плессета (21). В данной работе при выводе аналогичных уравнений учитывались также и нелинейные члены. В соответствии с системой обыкновенных дифференциальных уравнений (20) получается, что нелинейные члены по  $a(t)$  оказывают влияние не только на амплитуду искажения поверхности пузырька, но также и на его радиус при колебаниях с сохранением сферической симметрии.

Численные расчеты системы уравнений (20) и их сравнение с результатом расчетов системы уравнений (21), (23) показало следующее. При малых колебаниях поверхности пузырька нелинейные члены не оказывают влияния на характер изменения функций  $R(t)$  и  $a(t)$ . Влияние нелинейных членов начинает сказываться при колебаниях, когда со временем растет амплитуда возмущения поверхности пузырька, рассчитанная по уравнению Плессета. Учет нелинейных членов приводит к ограничению амплитуды возмущения. Таким образом, неустойчивые колебания по уравнению Плессета при определенных значениях параметров становятся устойчивыми при применении полученной системы нелинейных уравнений.

Авторы благодарят за обсуждение работы А. А. Аганина, Л. А. Косолапову и В. Г. Малахова.

## Список литературы

- [1] Воинов О. В., Петров А. Г. Движение пузырей в жидкости // ВИНТИ МЖГ. 1976. Т. 10.
- [2] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987.
- [3] Kull H. J. Theory of the RTI // Phys. Rep. 1991. V. 206. P. 197.
- [4] Иногамов Н. А., Демьянов А. Ю., Сок Э. Е. Гидродинамика перемешивания. М.: Изд-во МФТИ, 1999. 464 с.

- 
- [5] Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
- [6] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [7] Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [8] Leighton T. G. The acoustic bubble. UK, Cambridge: Academic Press, 1994. 613 p.
- [9] Plesset M. S. On the stability of the fluid flow with spherical symmetry // J. Appl. Math. 1954. V.2, № 1.
- [10] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.