



УДК 532.532

ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРИ КАВИТАЦИИ¹

К. Р. Закиров

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. В работе численно исследуется схлопывание парового пузырька в сжимаемой жидкости, сопровождающееся излучением расходящейся волны. Сжимаемость жидкости моделируется с помощью изэнтропического уравнения состояния Тэта. Рассматривается формирование возмущения в окрестности пузырька при схлопывании и затем его распространение в окружающую жидкость при повторном расширении пузырька. Расходящаяся волна достаточно точно регистрируется в экспериментах по лазерному пробую жидкости, с помощью датчиков установленных на некотором удалении от пузырька. Что же касается формирования возмущения, в литературе имеется автомодельное решение, полученное для жидкости с уравнением состояния Тэта, которое описывает заключительную стадию схлопывания. На основе данного автомодельного решения проводится тестирование численной схемы. После чего численное решение расходящейся волны сравнивается с имеющимися экспериментальными данными. Получено хорошее согласование с экспериментом.

Ключевые слова: Задача Рэлея, кавитация, лазерный пробой, сжимаемость жидкости, схлопывание одиночного пузырька, численное моделирование

1 Введение

Открытие явления кавитации связано с развитием судостроения. С развитием техники все большее увеличение скорости морских сообщений натолкнулось на ограничение естественного происхождения. В 1894 году

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97912)

на морских испытаниях английский эскадренный миноносец HMS «Отважный» не смог достичь расчетной скорости. При выяснении причин обнаружилось, что на высоких оборотах вокруг гребных винтов образуются каверны, которые ограничивают их упор [1]. Именно в это время для обозначения данного явления появилось новое слово кавитация — «образование в жидкости пузырьков, заполненных газом, паром или их смесью в результате местного уменьшения давления ниже критического значения».

Таким образом кавитация, возникающая вокруг лопастей, ограничивает упор гребных винтов, а следовательно, и скорость судов. Но интерес для теоретических изысканий вызвало другое проявление кавитации также отрицательное для судостроения, а именно, кавитационная эрозия. Пузырьки, образованные в результате местного уменьшения давления, попадая в область с высоким давлением, схлопываются, порождая ударные нагрузки. Схлопывание каверн близ твердых стенок вызывает повреждения, вырывая металл с их поверхности, и это является причиной быстрого износа гребных винтов, работающих в условиях кавитации. Представляется удивительным, то что мелкие пузырьки, наполненные паром, могут вызывать такие серьезные повреждения. Неправдоподобность этого эффекта стимулировала теоретические исследования. В то время из курса гидродинамики Безанта была известна чисто теоретическая задача о заполнении жидкостью сферической каверны [2], которая неизвестным образом внутри нее образовалась. Первое издание этого курса было опубликовано в 1859 году, то есть до испытаний эсминца «Отважный», следовательно, эта задача с кавитацией не связывалась. Лорд Рэлей рассмотрел задачу Безанта применительно к кавитации [3]. Его расчеты, сделанные для несжимаемой жидкости, подтверждают, что мелкие пузырьки пара обладают колоссальной разрушительной силой: при уменьшении радиуса пузырька в процессе схлопывания всего в 20 раз, давление в жидкости около стенок пузырька достигает 68 тонн на квадратный дюйм.

До возникновения термина кавитация человечество уже сталкивалось с проявлением схлопывания паровых пузырьков в виде шума, издаваемого закипающим чайником. Перед закипанием чайника паровые пузырьки, поднимающиеся через непрогретый верхний слой воды, остывая, схлопываются. Схлопывание сопровождается излучением акустических волн, которые и создают характерный шум. Вопросу образования и распространения таких волн посвящена данная статья.

2 Математическая модель с учетом сжимаемости жидкости

Рассмотрим следующую задачу: в жидкости, находящейся при комнатной температуре и атмосферном давлении, внезапно возникает сферический объем, заполненный паром. Под действием окружающего давления образовавшаяся полость начинает схлопываться. В силу того, что давление пара внутри пузырька пренебрежимо мало по сравнению с давлением в жидкости, то большую часть времени пузырек схлопывается так, как если бы был абсолютно пустым. Но на заключительной стадии скорость стенок пузырька возрастает настолько, что пар не успевает конденсироваться и сжатие происходит практически адиабатически. В результате давление внутри пузырька стремительно возрастает и начинает оказывать сопротивление свободному движению жидкости, происходит обращение движения и возмущение, образовавшееся в окрестности пузырька, распространяется в окружающую жидкость. Требуется произвести численный расчет формирования возмущения жидкости и последующего его распространения.

Сжимаемость жидкости будем моделировать с помощью изэнтропического уравнения состояния Тэта:

$$p = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma - 1\right] + p_\infty\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma, \quad (1)$$

для воды обычно $B = 3000 \text{ bar}$, а $\gamma = 7$. Если в данном уравнении за начальную плотность взять $\rho_0 = 0.9982 \text{ g/cm}^3$, соответствующую температуре $T = 293 \text{ K}$, то, как видно из Рис. 1, уравнение Тэта согласуется с экспериментальной изотермой, соответствующей данной температуре.

В реальной жидкости из-за действия силы тяготения возникает разница давлений на нижнюю и верхнюю стороны пузырька. За счет этого пузырьки всплывают и у них искажается сферическая форма. Также малые начальные отклонения сферической формы пузырька при схлопывании развиваются, что ведет к неустойчивости сферической формы. Всеми этими эффектами мы будем пренебрегать, считая, что пузырек сферический и совершает только радиальные колебания.

Поэтому выпишем уравнение неразрывности и движения в сферически-симметричной форме:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) = 0, \quad (2)$$

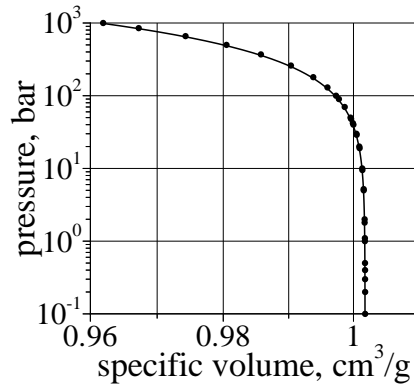


Рис. 1: Соотношение между давлением и плотностью: сплошная линия — уравнение состояния Тэта, точки экспериментальная изотерма ($T = 293 \text{ K}$)

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3)$$

изэнтропичность движения замыкает систему (2), (3).

Теперь рассмотрим граничные условия. На первый взгляд кажется, что возмущение должно формироваться при оказании пузырьком сопротивления свободному движению жидкости, но на самом деле, из-за сферической геометрии задачи, основная часть возмущения формируется именно при свободном схлопывании. Для исследования тенденций формирования возмущения будем пользоваться следующим граничным условием на стенках пузырька:

$$p|_R = 0, \quad (4)$$

где R — радиус пузырька.

Для решения основной задачи нам надо выписать граничное условие, которое бы моделировало поведение пара. На заключительной стадии, когда давление внутри пузырька возрастает настолько, что становится сравнимым с давлением жидкости, сжатие пузырька происходит практически адиабатически. До этой стадии давлением пара можно пренебрегать. Если считать, что содержимое пузырька сжимается адиабатически на протяжении всего процесса схлопывания с заниженной постоянной массой, соответствующей массе пара, остающегося в пузырьке во время коллапса, то это не будет противоречить действительности. В этом случае граничное условие запишем следующим образом:

$$p|_R = \frac{M}{R^{3n}}, \quad (5)$$

где R — радиус пузырька, M — константа, соответствующая массе пара, а n — показатель адиабаты. M и n будут подбираться в процессе численного интегрирования.

На бесконечности давление остается константой, равной начальному:

$$p|_\infty = p_0, \quad (6)$$

где $p_0 = 1 \text{ bar}$. В начальный момент времени жидкость покоится.

Получившуюся модель из трех уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями будем интегрировать численно.

3 Математическая модель для несжимаемой жидкости

Для аналитических рассуждений будем пользоваться моделью несжимаемой жидкости, она будет состоять из двух соотношений: уравнения неразрывности и движения. Уравнение неразрывности (2) при $\rho = \text{const}$ примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0.$$

Выведем некоторые соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Решим уравнение неразрывности методом разделения переменных:

$$u(r) = C \frac{1}{r^2}, \quad (7)$$

то есть скорость жидкости обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра пузырька, коэффициент пропорциональности можно найти из граничного условия: при $r = R$, $u = R'$, то есть

$$C = R'R^2. \quad (8)$$

Подставляя выражение для распределения скорости в уравнение движения (3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{dC}{dt} \frac{1}{r^2} - 2C^2 \frac{1}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

и интегрируя его по пространству от r до ∞ получим распределение давления в жидкости:

$$p(r) = p_0 + \rho \frac{dC}{dt} \frac{1}{r} - \rho C^2 \frac{1}{2r^4}. \quad (9)$$

Запишем данное уравнение для стенки полости $r = R$. Если считать давление на стенке полости равным нулю, то в силу (8) получим дифференциальное уравнение второго порядка для функции $R(t)$:

$$0 = p_0 + \rho R'' R + \rho \frac{3}{2} R'^2,$$

разрешимое относительно старшей производной:

$$R'' = \frac{dR'}{dt} = \frac{dR'}{dR} R' = -\frac{p_0}{\rho R} - \frac{3}{2} \frac{R'^2}{R}, \quad (10)$$

или:

$$\frac{dR'}{dR} = -2 \frac{1}{R} \left(\frac{p_0}{\rho R'} + \frac{3R'}{2} \right).$$

Проинтегрировав данное уравнение, получим выражение для скорости стенки полости:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{3}{2} R'^2 = \left(\frac{C_1}{R} \right)^3.$$

Учитывая начальные условия: при $R = R_0$, $R' = 0$ найдем:

$$C_1 = R_0 \left(\frac{p_0}{\rho} \right)^{1/3}.$$

В результате получим:

$$R'^2 = \frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right). \quad (11)$$

С помощью соотношений (8),(10),(11) можно выразить производную коэффициента C по времени как функцию от R :

$$\frac{dC}{dt} = (R' R^2)' = R'' R^2 + 2R R'^2 = \frac{p_0}{3\rho} \left(R_0 \frac{R_0^2}{R^2} - 4R \right) \quad (12)$$

4 Обсуждение результатов

4.1 Свободное схлопывание

Рассмотрим свободное схлопывание пузырька с граничным условием (4). Параллельно с численным интегрированием системы (2), (3) будем проводить аналитические вычисления для несжимаемой жидкости.

Из выражения для распределения скорости (7) видно, что скорость обратно пропорциональна квадрату координаты с коэффициентом пропорциональности C . Для того, чтобы оценить как будет изменяться во времени скорость, надо рассмотреть производную этого коэффициента по времени (12). Видно, что пока R мало отличается от R_0 производная этого коэффициента по времени будет отрицательной. А поскольку скорость заполнения — отрицательная величина, следовательно, скорость движения жидкости в любой эйлеровой точке будет возрастать.

То есть вся масса жидкости, окружающей полость движется с ускорением. Это начальная стадия процесса: жидкость из первоначального состояния покоя приходит в движение.

На Рис. 2 приведены распределения модуля скорости жидкости для четырех равноотстоящих моментов времени соответствующих начальной стадии процесса схлопывания. Видно, что со временем темп роста скорости уменьшается (четвертый момент времени соответствует нулевому ускорению).

Рассмотрим теперь распределения давления на начальной стадии. Правая часть выражения (9) состоит из одного постоянного и двух переменных слагаемых. Рассмотрим участие двух последних слагаемых на первой стадии процесса. Оба слагаемых во время первой стадии будут отрицательными. В начальный момент времени радиус $R = R_0$ скорость стенки $R' = 0$ и выражение для распределения давления записывается в виде:

$$p(r) = p_0 - \frac{p_0 R_0}{r} \quad (13)$$

то есть давление плавно меняется от 0 при $r = R_0$ на стенке полости до p_0 на бесконечности, и в этом участвует только первое слагаемое (второе равно нулю). Этот момент времени соответствует нулевому распределению на Рис. 2.

С ростом скорости вклад второго слагаемого увеличивается, а вклад первого уменьшается. При этом распределение давления будет стано-

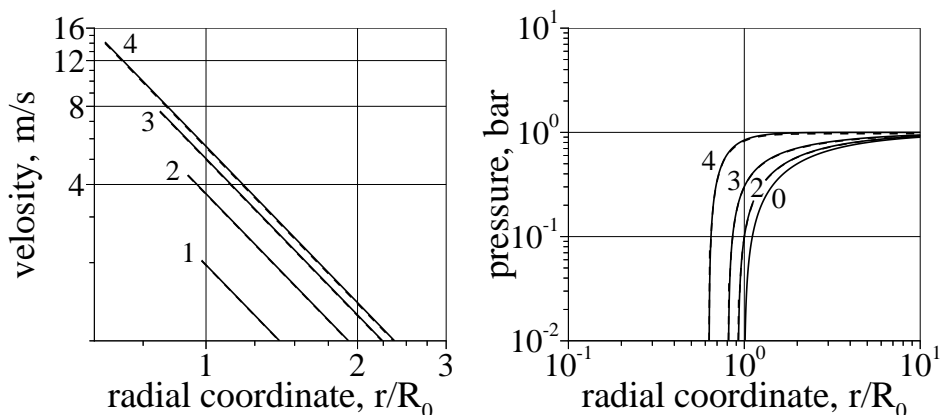


Рис. 2: Распределения модуля скорости и давления жидкости для начальной стадии процесса, сплошные линии — решение для несжимаемой жидкости, штриховые линии — численное решение

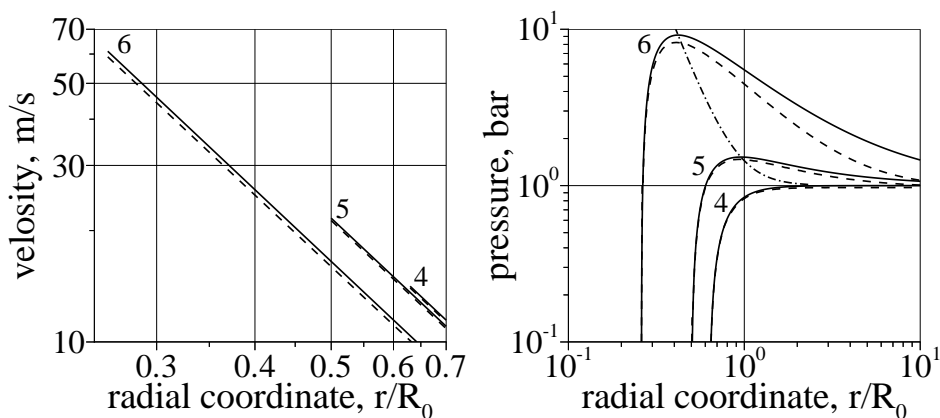


Рис. 3: Распределения параметров жидкости для стадии торможения, сплошные линии — решение для несжимаемой жидкости, штрихпунктирная линия — точки максимальных давлений, штриховые линии — численное решение

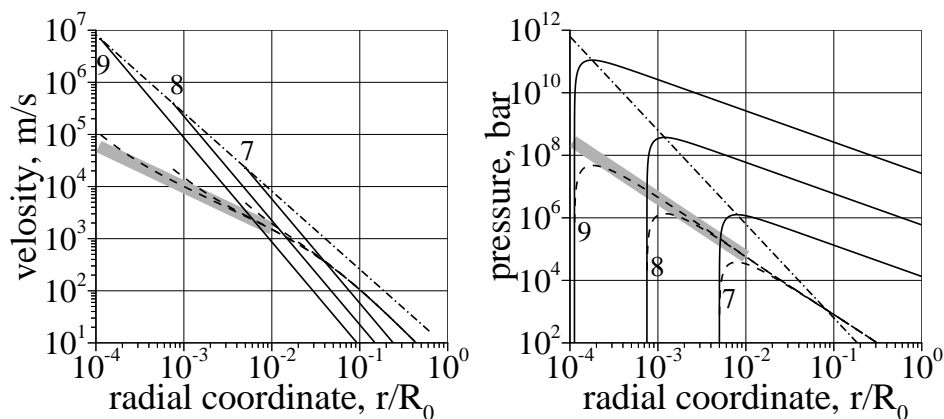


Рис. 4: Распределения параметров жидкости для заключительной стадии схлопывания. Сплошные линии — решение для несжимаемой жидкости, штрих-пунктирная линия: на первой диаграмме — зависимость скорости стенки от радиуса, на второй — точки максимальных давлений, штриховые линии — численное решение, серая линия — автомодельное решение Хантера

виться более крутым, поскольку второе слагаемое — $f(1/r^4)$ с ростом r затухает быстрее, чем первое — $f(1/r)$, это видно из Рис. 2 (распределение 4 соответствует моменту, когда первое слагаемое уменьшилось до нуля).

На начальной стадии движения жидкость можно считать несжимаемой. Распределения, полученные в ходе численного интегрирования были нанесены на Рис. 2 штриховыми линиями, они полностью совпадают с распределениями для несжимаемой жидкости. Начальная стадия заканчивается, когда радиус полости достигает следующего значения:

$$R = \frac{R_0}{4^{1/3}}. \quad (14)$$

При дальнейшем уменьшении радиуса полости, производная коэффициента C по времени (12) станет положительной и скорость движения жидкости в любой эйлеровой точке начнет убывать. Если на начальной стадии жидкость ускоряется, то теперь движущаяся жидкость начинает тормозиться.

На Рис. 3 приведены распределения модуля скорости жидкости для трех равноотстоящих моментов времени соответствующих стадии тормо-

жения. Видно, что со временем темп снижения скорости увеличивается. В момент времени 4 ускорение равно нулю, в последующие моменты времени 5 и 6 ускорение становится отрицательным и увеличивается по модулю.

Обратимся к выражению для распределения давления (9). На стадии торможения первое слагаемое становится положительным, второе остается отрицательным. То есть слагаемые начинают работать в разных направлениях. На поверхности полости давление всегда равно нулю — это вклад второго слагаемого, по мере удаления от полости действие второго слагаемого быстро затухает и начинает проявляться первое слагаемое — давление становится выше начального, на бесконечности оба слагаемых стремятся к нулю и давление равно постоянному начальному (распределения 5 и 6 на Рис. 3).

Таким образом, на второй стадии в жидкости можно выделить две области: в первой по ходу движения давление растёт от начального на бесконечности до некоторого максимального на некотором удалении от стенок, а во второй — падает от максимального до нуля на поверхности полости. Рост давления по ходу движения объясняется тем, что во второй стадии движение жидкости начинает тормозиться. В любой эйлеровой точке скорость жидкости с течением времени уменьшается, но поскольку стенка полости движется с ускорением всегда, то существует некоторая пристеночная область, в которой лагранжевая скорость частицы жидкости продолжает возрастать. Этим объясняется последующее падение давления.

Соотношением разделяющим жидкость на две области будет выражение для координаты, где оба слагаемых равны и давление достигает своего максимального значения:

$$r_{max} = R \left(4 \frac{R_0^3 - R^3}{R_0^3 - 4R^3} \right)^{1/3} \quad (15)$$

На Рис. 3 граница между этими двумя областями изображена штрихпунктирной линией.

Из Рис. 3 видно, что на данной стадии решения для несжимаемой и сжимаемой жидкости уже заметно отличаются. При торможении жидкости давление в ней должно возрастать. В модели несжимаемой жидкости из-за бесконечности скорости звука, весь объём жидкости откликается на торможение мгновенно и это соответствует затуханию давления с расстоянием по закону $f(1/r)$. Для сжимаемой жидкости скорость звука конечна. Поэтому при торможении давление в жидкости на расстоянии

будет расти с некоторым запаздыванием и это будет соответствовать более крутому затуханию давления с расстоянием. При изменении радиуса R на dR для сжимаемой жидкости всегда найдется такое расстояние r , на котором жидкость это изменение не успело почувствовать за конечное время. Данное r будет сокращаться с ростом скорости стенок пузырька. Это обстоятельство станет причиной принципиального отличия в решениях для несжимаемой и для сжимаемой жидкости на следующей стадии схлопывания.

Из соотношения (11) видно, что при стремлении радиуса полости к нулю, скорость стенки будет стремиться к бесконечности как функция $f(R^{-3/2})$ (на Рис. 4 — штрих-пунктирная линия), в то время как скорость жидкости в любой момент времени зависит от r как функция $f(r^{-2})$ (на Рис. 4 — распределения 7,8 и 9).

Если в выражение для распределения давления (9) вместо r подставить r_{max} (15), то получим зависимость p_{max} от R . При стремлении R к нулю, p_{max} можно считать равным:

$$p_{max} \approx \frac{2^{1/3}}{2^3} p_0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad (16)$$

то есть при стремлении R к нулю, максимальное давление, достигаемое в пристеночной области, стремится к бесконечности как функция $f(R^{-3})$ (на Рис. 4 — штрих-пунктирная линия), в то время как давление жидкости в области роста от начального на бесконечности до максимального в любой момент времени зависит от r как функция $f(r^{-1})$ (на Рис. 4 — распределения 7,8 и 9).

Для модели несжимаемой жидкости движение стенок пузырька мгновенно влияет на всю окружающую жидкость. Поэтому при стремлении R к нулю, давление на любом конечном r будет неограниченно возрастать. При учете же сжимаемости движение стенок пузырька влияет на окружающую жидкость не мгновенно, а с конечной скоростью. На заключительной стадии движение стенок становится настолько быстрым, что его успевает почувствовать только некоторая пристеночная область. В результате, как видно из Рис. 4, распределения параметров сжимаемой жидкости (штриховые линии) на некотором удалении от пузырька для разных моментов времени ложатся на одну линию. Эта линия в области порядка $R_0/100$ совпадает с автотельным решением Хантера [4] (на диаграмме серая линия).

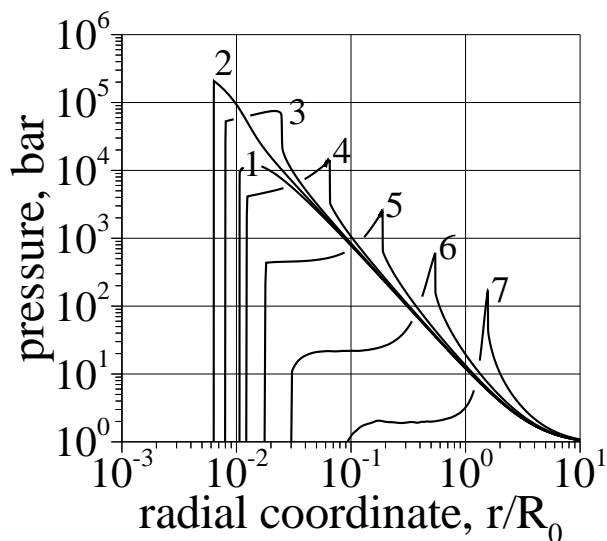


Рис. 5: Численные результаты. Распространение сферической волны от пузырька в окружающую жидкость. Начальный размер пузырька $R_0 = 1.92$ mm, глубина коллапса $R_{min} = 11$ mkm. Параметры для граничного условия (5): $M = 6.7 \times 10^{-25}$ kg/s/s, $n = 2$

4.2 Распространение сферической волны

Теперь будем решать задачу с граничным условием (5). В котором есть два параметра n и M . Если при постоянном n изменять M , то будет меняться глубина коллапса, показатель n влияет на жесткость коллапса. Профиль сформированного возмущения в логарифмическом масштабе представляет из себя линию с постоянным наклоном (распределения давления 1 или 2 на Рис. 5). При распространении возмущение переходит в большие масштабы длины, в результате профиль укручается и на диаграмме вырисовывается ударная волна, которая имеет перед собой некоторый пологий подъем.

В экспериментах по лазерному пробою [5] датчик давления устанавливался на расстоянии 3 мм от центра пузырька. На Рис. 5 приведено распределение 7, фронт ударной волны которого приходится на область датчика. Как видно из Рис. 5 ударная волна распространяясь переходит в большие масштабы длины, за счет этого при достаточно глубоком коллапсе момент прихода фронта ударной волны к датчику перестает

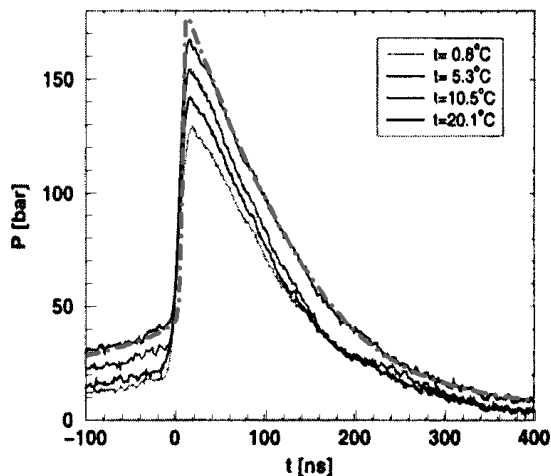


Рис. 6: Сравнение с экспериментом. Сплошные линии — экспериментальные, для различных температур. Штрих-пунктирная линия — расчетная, соответствующая температуре 20°C

зависеть от изменения минимального радиуса. В результате вид «пололого» предвестника ударной волны будет зависеть только от сжимаемости жидкости.

На Рис. 6 приведены показания с датчиков для различных температур. Расчетная кривая — штрих-пунктирная линия. Из хорошего согласования «пололого» предвестника можно сделать вывод, что уравнение состояния Тэта действительно соответствует реальной жидкости в области рассматриваемых давлений при начальной температуре 20°C . Степень затухания волны после разрыва зависит от жесткости коллапса, то есть от параметра n . Изменяя параметр M при найденном n , можно добиться глубины коллапса, которая соответствовала бы экспериментальной амплитуде волны. Из хорошего согласования расчета с экспериментом можно сделать вывод: в жидкости, находящейся при комнатной температуре и атмосферном давлении, паровой пузырек с начальным размером $R_0 = 1.92$ мм схлопывается до минимального радиуса равного $R_{min} = 11$ мкм, причем жесткость коллапса соответствует адиабатическому сжатию с показателем $n = 2$.

Автор выражает искреннюю признательность своим научным руко-

водителям профессору И.Ш. Ахатову и академику Р.И. Нигматулину за постановку задачи и полезные обсуждения. Автор также благодарит Топольникова А.С., Вахитову Н.К., Болотнову Р.Х. и Аганина А.А. за плодотворное сотрудничество.

Список литературы

- [1] J. Thornycroft, S. W. Barnaby, Torpedo Boat Destroyers. // Minutes of Proc. Inst. of Civil Engineers. 1895. V. 122. P. 51–103.
- [2] Besant W.H., Treatise on hydromechanics. // Cambridge university press. 1859.
- [3] Lord Rayleigh, On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. // Phil. Mag. 1917. V. 34. P. 94–98.
- [4] Hunter C., On the collapse of an empty cavity in water // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. P. 241–263.
- [5] Olgert Lindau, Reinhard Geisler and Werner Lauterborn, Temperature dependency of luminescence from laser-produced cavitation bubbles // J. Acoust. Soc. Am., 1999. V. 105. P. 1078–1081.