



УДК 532.329; 532.2.532

# Волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны конечных размеров<sup>1</sup>

*М. Н. Галимзянов, В. Ш. Шагапов*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Изучаются некоторые особенности динамики нелинейных двумерных волн давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны конечных размеров и различных форм. Представлены результаты численных экспериментов воздействия волновых импульсов на твердую стенку, в случаях отсутствия и наличия пузырьковой завесой на рассматриваемой поверхности.

На основе полученных результатов выявлен ряд зависимостей динамики двумерных возмущений от параметров сигнала и среды.

**Ключевые слова:** двумерные ударные волны, пузырьковая зона, численные методы, импульсный сигнал, волна сжатия, волна разряжения, объемное содержание газа

---

## 1 Введение

Хотя, к настоящему времени динамика одномерных волн давления в пузырьковой жидкости, являющейся системой с уникальными волновыми свойствами, теоретический и экспериментально подробно изучены [1–4], тем не менее интерес к этим явлениям не спадает. Одним из мало исследованных направлений является динамика волн, с учетом двумерных эффектов. Наиболее простым примером системы, для которой необходимо учесть многомерность, является жидкость, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97906)

В данной работе рассмотрена ситуация, когда эволюция импульсного давления в жидкости с пузырьками сопровождается одновременно двумерными и нелинейными эффектами. Рассмотрено действие волновых импульсов на твердую стенку, покрытую пузырьковой завесой конечных размеров.

## 2 Постановка задачи

Пусть в области, заполненной жидкостью, находится пузырьковая зона, ограниченная в общем случае цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси  $z$  (продольные размеры зоны значительно больше чем поперечные размеры) (Рис. 1). Рассмотрим двумерные волновые возмущения. Такие возмущения могут возникнуть, например, под действием плоского удара по жидкости, в которой находится пузырьковая зона конечных размеров или воздействием на систему граничным давлением, независимым от координаты  $z$  ( $p = p^0(t, y)$  при  $x = x_0$ ).

На основе общепринятых для пузырьковых жидкостей допущений примем систему макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)q}{a_0} \\ w &= \frac{da}{dt} \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l$$

где  $a$  — радиус пузырьков,  $\gamma$  — показатель адиабаты для газа,  $p_i$  — давления фаз,  $\rho_i^0$  — истинные плотности фаз,  $\alpha_i$  — объемные содержания фаз,  $q$  — интенсивность теплообмена,  $n$  — число пузырьков в единице объема,  $w$  — радиальная скорость пузырьков. Скорости  $u$  и  $v$  соответствуют движению по координатам  $x$  и  $y$ . Нижними индексами  $i = l, g$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения, в соответствии с уточнением, предложенным в [3], будем полагать, что  $w = w_R + w_A$ , где  $w_R$  описывается уравнением Рэлея-Ламба, а  $w_A$  определяется из решения задачи

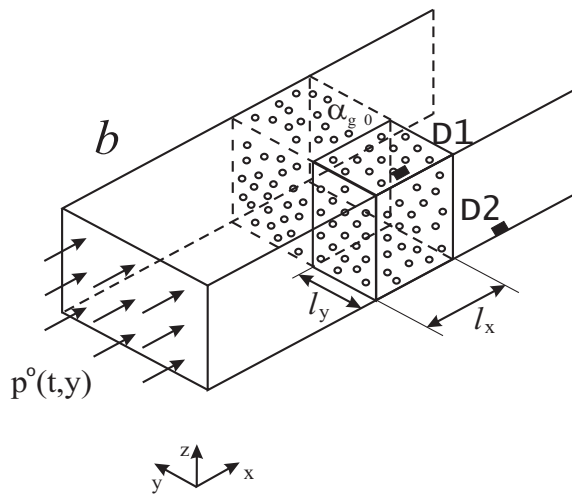
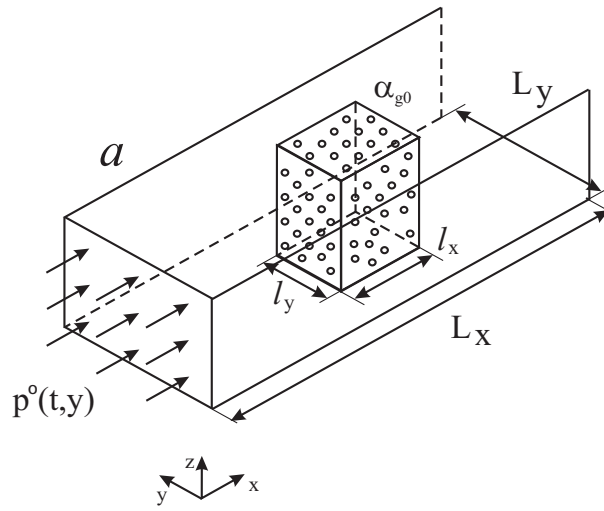


Рис. 1: Схематическое изображение расчетной области

о сферической разгрузке на сфере радиуса  $a$  в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} \quad (2)$$

$$w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}} \quad (3)$$

где  $\nu_l$  — вязкость жидкости,  $C_l$  — скорость звука в жидкости ( $C_l = 1500$  м/с).

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_l = p_0 + C_l^2(\rho_l^0 - \rho_{l0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g \quad (4)$$

где  $R$  — газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем индексами 0 внизу снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток  $q$  задается приближенным конечным соотношением [1]

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3$$

$$\text{Nu} = \sqrt{\text{Pe}}, \quad \text{Pe} \geq 100, \quad \text{Nu} = 10, \quad \text{Pe} < 100$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}$$

где  $T_0 = \text{const}$  — температура жидкости,  $\lambda_g$ ,  $c_g$  — теплопроводность и теплоемкость газа,  $\text{Nu}$ ,  $\text{Pe}$  — числа Нуссельта и Пекле. Для описанной выше пузырьковой жидкости известны частота колебаний пузырьков и равновесная скорость звука:

$$\omega_M = \frac{1}{a_0} \cdot \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_{l0}^0}}, \quad C = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\alpha_{g0} \rho_{l0}^0}}.$$

Принятая система уравнений позволяет адекватно описывать динамику волн с достаточно «крутыми» участками, когда сжатие пузырьков определяется не только эффектами радиальной инерции несущей жидкости, но и акустической разгрузкой на пузырьках, и, следовательно, сжимаемостью жидкости. Кроме того, из этой математической модели в частном случае при  $\alpha_g = 0$  следует волновое уравнение для акустически сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой зоной это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

### 3 Метод численного расчета

Для численного анализа задачи об эволюции волн в жидкости при наличии в ней пузырьковой области удобнее пользоваться системой уравнений, приведенной в разд. 1, записанной в лагранжевых переменных. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах пузырьковая область неподвижна. Из уравнений (1), после преобразований, можно получить следующую систему в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho J} \left( \frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right), & \frac{\partial x}{\partial t} &= u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho J} \left( \frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right), & \frac{\partial y}{\partial t} &= v \\ \frac{\partial p_l}{\partial t} &= \frac{C_l^2 \rho_l^0}{1 - \alpha_g} \left[ \frac{3\alpha_g}{a} w + \left( \frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{l0}}{J^2 \rho_l^0} \right) \frac{\partial J}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t}, & \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A \end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_R}{\partial t} = \left[ \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}$$

$$\left( J = \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right),$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial x_0}$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — лагранжевые переменные, в качестве которых берутся начальные эйлеровы координаты,  $J$  — якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным. Система (5) решается численно, согласно численной схеме приведенной в [5].

## 4 Результаты численных расчетов

На Рис. 2 и 3 иллюстрируются эффекты нелинейности и двумерности при эволюции волнового импульса, заданного в виде

$$p^0(t, y) = p_0 + \Delta p_0 \exp[\psi(t_*)], \quad \psi(t_*) = - \left( \frac{t - t_*/2}{t_0} \right)^2 \quad (6)$$

здесь  $p_0$  — первоначальное давление (во всех расчетах  $p_0 = 0.1$  МПа),  $\Delta p_0$  — амплитуда импульса,  $t_*$  — протяженность импульса,  $t_0$  — параметр определяющий характерную ширину первоначального импульса. Импульс действует через границу  $x_0 = 0$  и распространяется в полубесконечном канале, наполненном водой, при наличии на боковой границе расчетной области зоны конечных размеров, заполненной водовоздушной смесью Рис. 1, *b*. Рис. 2 и 3 отличаются амплитудами:  $\Delta p_0 = 0.3$  МПа и  $0.01$  МПа. Расчетная область взята так, чтобы вторичные сигналы, образованные отражением от стенок области, в период взаимодействия волнового импульса с завесой, не сказывались. На Рис. 2 представлены распределение давления в момент  $t = 3$  мс и показания датчиков D1 и D2 (расположение датчиков представлено на Рис. 1, *b*). Сплошная и пунктирные линии в показаниях датчиков D1 и D2 соответствуют случаям завесы конечных размеров ( $l_x = 1$  м,  $l_y = 0.5$  м) и случаю, когда пузырьковая завеса полностью заполняет канал в поперечном направлении ( $l_x = 1$  м,  $l_y = 2$  м). Схематическая иллюстрация для обоих случаев представлено на Рис. 1, *b*. Штрихпунктирная линия на Рис. 2 и 3 соответствует первоначальному импульсу.

В [4] для одномерного случая установлено, что при прохождении нелинейного импульсного сигнала через пузырьковую завесу с достаточно малым объемным содержанием газа ( $\alpha_{g0} = 10^{-4}$ ) и с пузырьками, периоды радиальных пульсации которых не превышают протяженность импульса ( $t_* \geq 2\pi\omega_M^{-1}$ ), в зависимости от амплитуды сигнала может происходить нарастание или уменьшения амплитуды исходного импульса. Этот эффект иллюстрируют штриховые линии на Рис. 2 и 3. Из Рис. 2 (штриховые линии) видно, что происходит «укручение» первоначального импульса и нарастание его амплитуды на  $0.05$  МПа. Из Рис. 3 (штриховые линии) следует, что из-за малости амплитуды первоначального импульса при прохождении через завесу происходит уменьшение амплитуды первоначального импульса.

Сплошные линии для датчиков D1 и D2 на Рис. 2 и 3 показывают динамику сигнала для случая завесы конечных размеров. Из Рис. 2

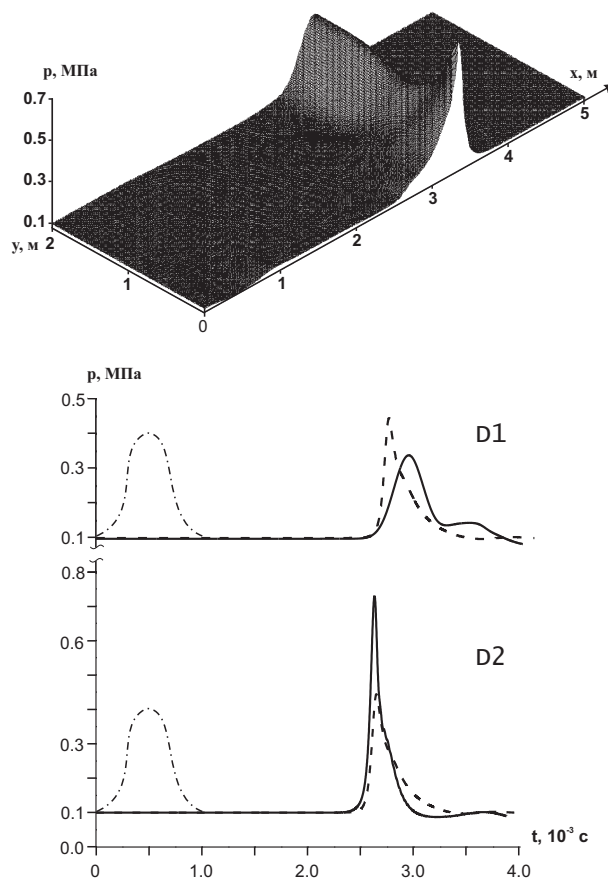


Рис. 2: Эффекты нелинейности и двумерности при распространении колоколообразного импульсного сигнала в водяном канале, при наличии на боковой границе канала пузырьковой зоны конечных размеров заполненной водовоздушной смесью. Параметры импульса и системы следующие:  $\Delta p_0 = 0.3$  МПа,  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $L_x = 5$  м,  $L_y = 2$  м,  $p_0 = 0.1$  МПа,  $t_* = 10^{-3}$  с,  $\rho_{l0}^0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_0 = 300$  К,  $c_g = 1006$  Дж/К · кг,  $\lambda_g = 2.6 \cdot 10^{-2}$  Дж/К · с · м. Датчик D1 расположен на расстоянии 0.1 м от задней границы завесы и имеет координаты  $x_0 = 3.1$  м,  $y_0 = 1.5$  м. Датчик D2 расположен на боковой границе расчетной области и имеет соответственно координаты  $x_0 = 3.1$  м,  $y_0 = 0$  м

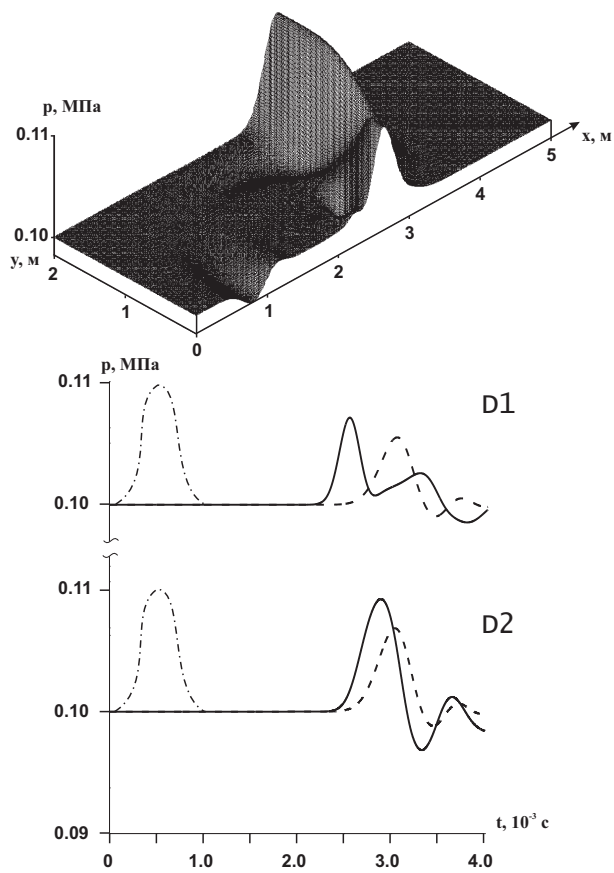


Рис. 3: То же, что на Рис. 2, но амплитуда первоначального импульса  $\Delta p_0 = 0.01$  МПа. Остальные параметры такие же как на Рис. 2



(сплошные линии) видно, что на датчик D2, расположенный на боковой границе за завесой действует импульс, в два раза превышающий по амплитуде первоначальный. Этот эффект является следствием следующих факторов: у той части импульса, которая движется в завесе, из-за нелинейных эффектов [4] происходит нарастание амплитуды и эта часть отстает от участка волны, которая двигаясь по «чистой» жидкости проходит зону не заполненную пузырьковой завесой и начинает распространяться по направлению к границе  $y_0 = 0$ . Это видно из показаний датчика D1 на Рис. 2 и 3, амплитуда давления из-за движения по направлению к границе  $y_0 = 0$  меньше амплитуды первоначального импульса. Далее происходит «слияние» двух амплитуд — амплитуды части импульса, вышедшей из завесы, и амплитуды части импульса, которая распространяется к границе  $y_0 = 0$ . Таким образом, получившаяся амплитуда, регистрируемая датчиком D2, превышает амплитуду первоначального сигнала. Проявление этих эффектов видно и из Рис. 3, в этом случае амплитуда давления, регистрируемая датчиком D2, хотя и меньше амплитуды первоначального сигнала, но превышает амплитуду прошедшего сигнала, реализуемого в одномерном случае.

Рассмотрим воздействие импульсного сигнала на стенку, частично покрытую пузырьковой завесой (Рис. 4, *a*). Будем полагать, что завеса расположена в середине рассматриваемого участка стенки. Рис. 4, *b*, *c*, и *d* иллюстрируют показания датчиков D1, D2 и D3.

Видно, что датчик D1 фиксирует первоначальный импульс (обращенный вверх), сигнал, отраженный от завесы (волну разряжения, обращенную вниз) и сигнал, отраженный от твердой стенки (волну сжатия). Из показаний датчика D2 следует, что пузырьковая завеса конечных размеров в зависимости от объемного содержания газа существенно уменьшает амплитуду воздействия на стенку волнового импульса. Из осциллограмм следует, что импульс, первоначально имевший амплитуду 0.3 МПа, пройдя через завесу с объемным содержанием  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  или  $10^{-3}$ , воздействует на стенку с амплитудой 0.05 МПа или 0.2 МПа соответственно, в случае отсутствия завесы на стенку воздействует сигнал амплитудой около 0.6 МПа. При этом необходимо отметить, что в случае наличия завесы увеличивается время воздействия на стенку. Датчик D3 фиксирует падающий сигнал (обращенный вверх) и сигнал, отраженный от границы завесы (волна разряжения, обращенная вниз). Из показаний этого датчика следует, что в случае воздействия импульса конечной длительности для точек жесткой стенки наличие на некотором расстоянии пузырьковой зоны, во-первых, уменьшает амплитуду воздействия импульсного сигнала на 0.1 МПа, во-вторых, эти точки «чувствуют» волну

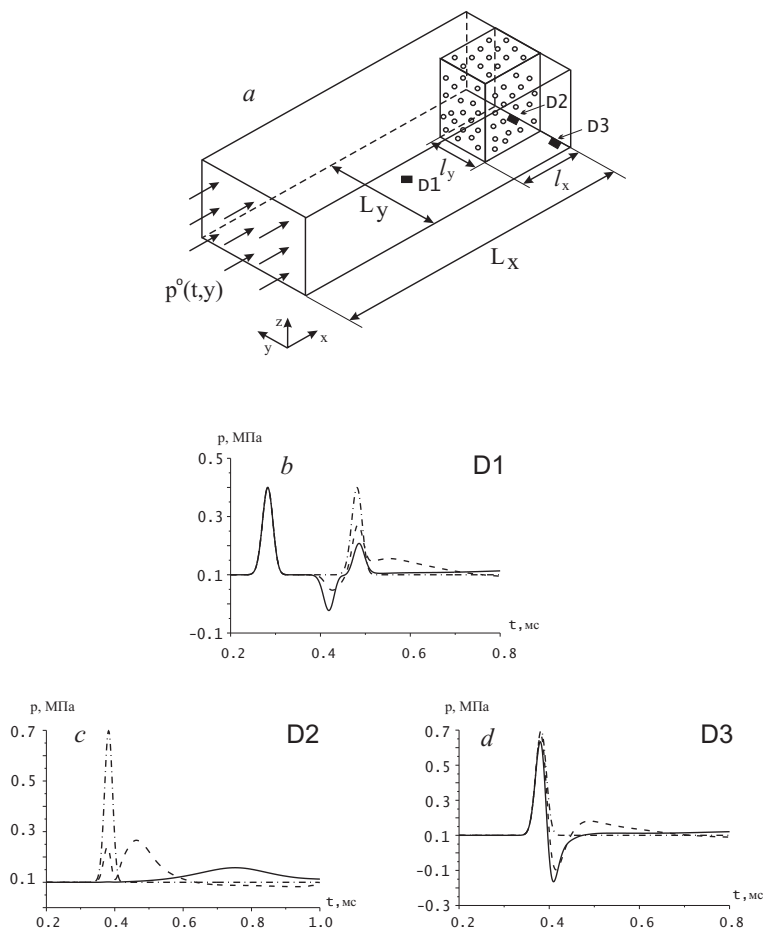


Рис. 4: Воздействие импульсного сигнала на стенку, частично покрытую пузырьковой завесой. Параметры первоначального импульса и системы следующие:  $t_* = 10^{-4}$  с,  $l_x = l_y = 0.05$  м,  $L_x = 0.5$  м,  $L_y = 0.95$  м. Остальные параметры такие же как для Рис. 2. Датчик D1 расположен перед пузырьковой завесой на расстоянии 0,1 м и имеет координаты  $x_0 = 0.35$  м,  $y_0 = 0.475$  м, датчик D2 расположен на стенке за завесой и имеет координаты  $x_0 = 0.5$  м,  $y_0 = 0.475$  м, датчик D3 также расположен на стенке (но вне участка, покрытого завесой) на расстоянии 0.05 м от боковой границы пузырьковой зоны и имеет координаты  $x_0 = 0.5$  м,  $y_0 = 0.4$  м. Штрихпунктирная линия соответствует случаю отсутствия перед стенкой завесы. Сплошная и пунктирные линии в показаниях датчиков соответствуют объемному содержанию газа в завесе  $\alpha_{g0} = 10^{-2}$  и  $10^{-3}$

разрядки, которая в зависимости от длительности и амплитуды может вызвать откольные разрушения стенки.

## 5 Заключение

В результате исследований установлено, что при распространении импульса конечной длительности в жидкости, содержащей пузырьковую зону конечных размеров, в зависимости от параметров импульса и пузырьковой зоны частицы жидкости, находящиеся за пузырьковой зоной, из-за проявления двумерных и нелинейных эффектов, могут «почувствовать» большие амплитуды давления, чем амплитуда первоначального импульса.

Когда по твердой стенке, имеющей пристенную пузырьковую завесу конечных размеров, «бьет» волновой импульс, завеса, в зависимости от параметров (размеров пузырьковой зоны, объемного содержания газа в завесе, радиуса пузырьков) завеса может существенно уменьшить или увеличить воздействие импульсного сигнала. Пристенная пузырьковая зона влияет и на участки, которые находятся на некотором расстоянии от завесы.

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
- [2] Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е. Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 302 с.
- [3] Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1088.
- [4] Гималтдинов И. К., Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш. Эволюция волн давления в жидкости, содержащей зону с пузырьками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 133–142.
- [5] Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш., Гималтдинов И. К., Галимзянов М. Н. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–767.