



УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ И ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ СО СРЕДОЙ

А. Г. Хакимов

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Приводятся основные уравнения, описывающие движение упругих и упругопластических сред с различными уравнениями состояния и учитывающие действие силы тяжести, вращение, влияние армирующего геосинтетического материала. Решен ряд практических задач.

Ключевые слова: Осесимметричные и плоские задачи, динамическое взаимодействие, упругие и упругопластические тела

1 Введение

Рассматриваются осесимметричные и плоские задачи динамического взаимодействия упругих и упругопластических тел со средой с учетом температурного поля, для решения которых применяется метод конечных разностей типа Уилкинса [1].

Объектом исследования является многослойное твердое тело, в отдельных слоях которого деформирование под действием нагрузок происходит как: упругой среды; упругопластической среды с условием текучести Мизеса; упругопластической среды с условием пластичности Мизеса — Шлейхера; сыпучей среды с выполнением закона Кулона. Для расширения приложений методики работы [1] приводятся уравнения движения, учитывающие действие силы тяжести, вращение твердого тела, армирование твердого деформируемого тела геотекстильным материалом. Постановки отдельных практических задач приводятся в работах [2, 5, 6].

В работе перечисляются корректные постановки краевых задач общего вида и приводятся результаты расчетов задачи роликового уплотнения асфальтобетонной смеси.

2 Основные уравнения

Для нестационарных движений с двумя пространственными переменными в системе цилиндрических координат x, y, θ (x — ось симметрии, y — радиальная координата $d_1 = 1$) или в плоской декартовой системе координат x, y ($d_1 = 0$) основные уравнения в безразмерном виде имеют вид (черточки над безразмерными величинами пропущены) [1, 2]: уравнения движения

$$\begin{aligned}\rho\ddot{x} &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{T_{xy}}{y}d_1 + F_x, \\ \rho\ddot{y} &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\sigma_y - \sigma_\theta}{y}d_1 + F_y,\end{aligned}$$

уравнение неразрывности

$$\dot{V} = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} + \frac{\dot{y}}{y}d_1,$$

уравнение энергии

$$\dot{E} = -(P + q)\dot{V} + V(S_x\dot{\varepsilon}_x + S_y\dot{\varepsilon}_y + S_\theta\dot{\varepsilon}_\theta + T_{xy}\dot{\varepsilon}_{xy}),$$

уравнение теплопроводности

$$\rho^0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{E} + \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} d_1 \right),$$

уравнения состояния:

компоненты дивергента напряжений

$$\begin{aligned}\dot{S}_x &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_x - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right) + \delta_x, & \dot{S}_y &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_y - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right) + \delta_y, \\ \dot{S}_\theta &= 2\mu \left(\dot{\varepsilon}_\theta - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right), & \dot{T}_{xy} &= \mu \dot{\varepsilon}_{xy} + \delta_{xy},\end{aligned}$$

скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial\dot{y}}{\partial y}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{y}}{y}d_1, \quad \dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} + \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} \right),$$

гидростатическое давление

$$P = -k(\ln V - 3\alpha_T T), \quad V = \rho^0 / \rho,$$

условие текучести Мизеса

$$S_x^2 + S_y^2 + S_\theta^2 + 2T_{xy}^2 - \frac{2}{3}\sigma_T^2 \leq 0,$$

где нормальные напряжения через компоненты девиатора напряжений выражаются по формулам

$$\sigma_x = S_x - (P + q), \quad \sigma_y = S_y - (P + q), \quad \sigma_\theta = S_\theta - (P + q),$$

а искусственная вязкость записывается в виде:

$$q = \frac{a_1 C_L \rho^0 \sqrt{A}}{V} \cdot \left| \frac{\dot{V}}{V} \right| + \frac{C_0^2 \rho^0 A}{V} \cdot \left| \frac{\dot{V}}{V} \right|^2.$$

Здесь σ_T — предел текучести материала, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_\theta$ — нормальные напряжения; T_{xy} — касательное напряжение, S_x, S_y, S_θ — компоненты девиатора напряжений; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{xy}$ — деформации; P — гидростатическое давление, V — относительный объем, E — внутренняя энергия на единицу начального объема, ρ, ρ^0 — плотность и ее начальное значение; k — модуль объемного сжатия, λ, μ — постоянные Ляме; C — удельная теплоемкость, λ_1 — коэффициент теплопроводности, α_T — коэффициент линейного расширения, T — температура, F_x, F_y — проекции силы F на оси координат; t — время, точка над величинами означает производную по времени для фиксированной частицы, q — искусственная вязкость, a_1 — местная скорость звука, C_0, C_L — постоянные; $\delta_x, \delta_y, \delta_{xy}$ — поправки на поворот, A — площадь ячейки. С помощью выражения для силы F учитывается действие силы тяжести, вращение тела, влияние армирования геосинтетическим материалом.

Отметим также, что при $d_1 = 0$ индекс θ в уравнениях следует заменить на z (координата z). Причем, для плоской деформации $\varepsilon_z = 0$. Для плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$ и уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}.$$

Основные уравнения записаны в безразмерном виде (черточки над обозначениями пропущены) для следующих величин:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/L, \quad \bar{y} = y/L, \quad \bar{E} = E/\sigma_T, \quad \bar{\lambda} = \lambda/\sigma_T, \quad \bar{\mu} = \mu/\sigma_T, \quad \bar{\sigma}_x = \sigma_x/\sigma_T, \quad \bar{\sigma}_y = \sigma_y/\sigma_T, \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta/\sigma_T, \quad \bar{T}_{xy} = T_{xy}/\sigma_T, \quad \bar{P} = P/\sigma_T, \quad \bar{q} = q/\sigma_T, \quad \bar{S}_x = S_x/\sigma_T, \quad \bar{S}_y = S_y/\sigma_T, \\ \bar{S}_\theta &= S_\theta/\sigma_T, \quad \bar{k} = k/\sigma_T, \quad \bar{t} = ta/L, \quad \bar{\rho} = \rho a^2/\sigma_T, \quad \bar{T} = T/T^*, \quad \bar{\alpha}_T = \alpha_T T^*, \end{aligned}$$

$$\bar{C} = CT^*/a^2, \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_1 T^*/(aL\sigma_T), \quad \dots$$

Здесь L — характерный размер, T^* — характерная температура, a — скорость звука.

1. Учет силы тяжести. В этом случае величины F_x, F_y определяются по формулам:

$$F_x = -\rho g \sin \gamma, \quad F_y = -\rho g \cos \gamma, \quad g = g_p L/a^2,$$

где g_p, γ — ускорение свободного падения и угол наклона оси x к горизонту. Для осесимметричных задач $\gamma = \pm\pi/2$.

2. Учет вращения для осесимметричных задач. В уравнениях движения элемента среды в этом случае величины F_x, F_y имеют следующий вид:

$$F_x = 0, \quad F_y = \rho\omega^2 y, \quad \omega = \omega_p L/a,$$

где ω_p — угловая скорость вращения осесимметричного тела.

3. Учет влияния геотекстильного материала и силы тяжести на движение среды в осесимметричном случае [6]. Здесь формулы для F_x, F_y для конечного элемента среды записываются в виде:

$$F_x = \frac{\Delta N_{1x} \cdot y}{V_p} + \rho g, \quad F_y = \frac{(N_{1y} - N_2) \cdot \Delta s}{V_p} + \frac{\Delta N_{1y} \cdot y}{V_p},$$

$$\Delta N_{1x} = \Delta N_1 \sin \psi, \quad \Delta N_{1y} = \Delta N_1 \cos \psi,$$

$$N_1 = \frac{E_M h}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{E_M h}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{ds}{ds_H} - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{y}{y_H} - 1,$$

$$\bar{N}_1 = N_{1p}/(\sigma_T L), \quad \bar{N}_2 = N_{2p}/(\sigma_T L), \quad \bar{E}_M = E_M/\sigma_T,$$

$$E_y = E_y/(\sigma_T L), \quad N = E_y \Delta l/l_0,$$

где V_p — объем среды, сосредоточенный в узле, E_y, E_M — условный модуль упругости и модуль упругости геотекстильного материала; h — толщина геотекстильного материала; $\Delta l, l_0$ — удлинение и начальная длина геотекстильного материала между узлами; s — длина дуги меридионального сечения оболочки, Δs — элементарная длина дуги меридионального сечения оболочки, отнесенная к узлу, N_1, N_2 — меридиональные и окружные усилия в синтетическом материале; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — меридиональные и кольцевые относительные деформации; ΔN_1 — приращение меридионального усилия в узле, ψ — угол между осью y и усилием натяжения,

индекс « p » относится к размерным величинам. Здесь индекс « n » относится к параметрам оболочки в недеформированном состоянии. Предполагается, что геотекстильный материал проходит по узловым точкам. Следует отметить, что уравнения движения в таком виде не учитывают силы инерции элемента геотекстильного материала.

4. Уравнения состояния для упругопластической среды (асфальтобетонной смеси) [5]. Гидростатическое давление определяется по формулам: при $V_H \geq V$ (начальное нагружение)

$$p = -k \ln V, \quad V \geq V_z;$$

$$p = -k \ln V_z + P^0((V_z - V)/V_z V)^m, \quad V_z \geq V;$$

при $V \geq V_H$ (разгрузка или повторное нагружение)

$$p = p_k, \quad V_k = \exp(-p_k/k); \quad V \geq V_k;$$

$$p = -k \ln V, \quad V_k \geq V \geq V_z;$$

$$p_H = -k \ln V_z + P^0((V_z - V_H)/V_z V_H)^m,$$

$$p_1 = p_H(1 - (V - V_H)/\Delta V_{\text{раз}}), \quad V_z \geq V_H;$$

$$p = p_1, \quad \text{если } p_1 \geq p_k; \quad p = p_k, \quad \text{если } p_1 \leq p_k;$$

условие текучести Мизеса-Шлейхера:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_\theta^2 + 2T_{xy}^2 - \frac{1}{3}(\eta p + \beta)^2 \leq 0,$$

где p_k — гидростатическое давление, при котором нарушается сплошность материала, η, β — постоянные, V_H — минимальное значение относительного объема, которое достигнуто при деформировании в ячейке, P^0, V_z, m — постоянные; $\Delta V_{\text{раз}}$ — изменение относительного объема при разгрузке (принимается $\Delta V_{\text{раз}} = V_z$).

5. Уравнения состояния для сыпучей среды [4, 6]. Касательное τ и нормальное σ напряжения на наклонной площадке определяются по формулам:

$$\tau = T_{xy} \cos 2\alpha + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2T_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

где α — угол между осью x и нормалью к наклонной площадке.

На главной площадке $\tau = 0$, поэтому из вышеприведенных соотношений следует:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1^* = \frac{2T_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

На первой и второй главной площадках нормальные напряжения σ_1^* и σ_3^* определяются по формулам:

$$\sigma_1^* = \sigma_x \cos^2 \alpha_1^* + \sigma_y \sin^2 \alpha_1^* + 2T_{xy} \sin \alpha_1^* \cos \alpha_1^*,$$

$$\sigma_3^* = \sigma_x \cos^2 \alpha_2^* + \sigma_y \sin^2 \alpha_2^* + 2T_{xy} \sin \alpha_2^* \cos \alpha_2^*,$$

где

$$\alpha_2^* = \alpha_1^* + \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \alpha_1^* < 0,$$

$$\alpha_2^* = \alpha_1^* - \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \alpha_1^* \geq 0.$$

Главные напряжения σ_1, σ_3 удовлетворяют условию $\sigma_1 > \sigma_3$, поэтому

$$\sigma_1 = \sigma_1^*, \quad \sigma_3 = \sigma_3^*, \quad \alpha_1 = \alpha_1^*, \quad \alpha_2 = \alpha_2^*,$$

если $\sigma_1^* > \sigma_3^*$, и

$$\sigma_1 = \sigma_3^*, \quad \sigma_3 = \sigma_1^*, \quad \alpha_1 = \alpha_2^*, \quad \alpha_2 = \alpha_1^*,$$

если $\sigma_1^* \leq \sigma_3^*$.

Далее, определяются [4]:

$$s = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad t^* = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4T_{xy}^2},$$

$$\sin \varphi_T = \frac{t^*}{s + H}, \quad H = C_1 \cdot \operatorname{ctg} \varphi,$$

где C_1 — коэффициент сцепления, φ — угол внутреннего трения, которые связаны законом Кулона [4]

$$\tau_{max} = C_1 + \sigma \operatorname{tg} \varphi,$$

где τ_{max} — максимальное касательное напряжение.

Если $\varphi_T > \varphi$, то напряжения определяются по следующим формулам:

$$\sigma_x^* = -\sigma(1 + \sin \varphi \cos 2\alpha_2) + H, \quad \sigma_y^* = -\sigma(1 - \sin \varphi \cos 2\alpha_2) + H,$$

$$T_{xy} = \operatorname{sign}(T_{xy})\sigma \sin \varphi \sin 2\alpha_2, \quad \sigma = s + H,$$

причем, если

$$\sigma_x > \sigma_y, \quad \sigma_x^* > \sigma_y^* \quad \text{или} \quad \sigma_x < \sigma_y, \quad \sigma_x^* < \sigma_y^*,$$

то

$$\sigma_x = \sigma_x^*, \quad \sigma_y = \sigma_y^*,$$

а если

$$\sigma_x > \sigma_y, \quad \sigma_x^* < \sigma_y^* \text{ или } \sigma_x < \sigma_y, \quad \sigma_x^* > \sigma_y^*,$$

то

$$\sigma_x = \sigma_y^*, \quad \sigma_y = \sigma_x^*.$$

3 Кинематические и динамические граничные условия

Перечислим возможные граничные условия. На свободной поверхности выполняются условия:

$$\sigma = \tau = 0,$$

где σ, τ — нормальное и касательное напряжения.

На подвижной границе Γ , заданной уравнениями

$$x_\Gamma = x_\Gamma(s, t), \quad y_\Gamma = y_\Gamma(s, t),$$

могут выполняться различные граничные условия:

а) гладкая поверхность

$$(\dot{x} - \dot{x}_\Gamma) \cos \alpha + (\dot{y} - \dot{y}_\Gamma) \sin \alpha = 0, \quad \tau = 0;$$

б) прилипание

$$\dot{x} = \dot{x}_\Gamma, \quad \dot{y} = \dot{y}_\Gamma, \quad |\tau| < f_1 |\sigma|, \quad \sigma < 0;$$

в) скольжение с трением

$$|\tau| = f_1 |\sigma|, \quad \sigma < 0, \quad (\dot{x} - \dot{x}_\Gamma) \cos \alpha + (\dot{y} - \dot{y}_\Gamma) \sin \alpha = 0.$$

Здесь s — дуговая абсцисса на границе контура, α — угол между нормалью к границе и осью x , f_1 — коэффициент трения скольжения, x_Γ, y_Γ — координаты x и y на границе.

Граничные условия для качения абсолютно жесткого ролика по деформируемому телу (плоская задача) имеют вид:

качение без скольжения

$$\dot{x} = -\omega(y_\Gamma - y_p), \quad \dot{y} = \omega(x_\Gamma - x_p), \quad |\tau| < f_1 |\sigma|, \quad \sigma < 0, \quad \omega = -V_{0x}/R,$$

качение со скольжением

$$[\dot{x} + \omega(y_{\Gamma} - y_p)] \cos \alpha + [\dot{y} - \omega(x_{\Gamma} - x_p)] \sin \alpha = 0, \quad |\tau| = f_1 |\sigma|, \quad \sigma < 0.$$

где V_{0x} - проекция скорости центра ролика на ось x , ω, R - угловая скорость ролика и ее радиус; x_p, y_p - координаты мгновенного центра скоростей ролика.

4 Граничные условия для температурного поля

Задана температура на границе

$$T(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) = T_0(t).$$

Теплообмен с окружающей средой описывается выражением:

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha \right) = \alpha_c (T - T_c),$$

где T_0 - заданная температура, T_c, α_c - температура окружающей среды и коэффициент теплоотдачи.

Для теплоизолированной поверхности выполняется равенство:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \sin \alpha = 0.$$

Идеальный контакт двух тел определяется равенством:

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_1}{\partial y} \sin \alpha \right) = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_2}{\partial y} \sin \alpha \right),$$

где T_1, T_2 - температура на границе первого и второго тела, α - угол между внешней нормалью и осью x .

Выделение тепла на границе двух тел описывается формулами:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_1}{\partial y} \sin \alpha \right) - \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_2}{\partial y} \sin \alpha \right) = Q,$$

$$Q = \tau V_{\tau}, \quad V_{\tau} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \cos \alpha + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \sin \alpha,$$

$$T_2 = T_1 + \rho_1 \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_1}{\partial y} \sin \alpha \right) + \rho_2 \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T_2}{\partial y} \sin \alpha \right),$$

где V_{τ} - скорость относительного перемещения на границе первого тела относительно второго, ρ_1, ρ_2 - термические сопротивления, Q - количество тепла, выделяющегося на границе за единицу времени на единице площади.

В начальный момент времени известно поле напряжений и температур.

5 Численный метод

Для решения задач применяется метод конечных разностей типа Уилкинса [1]. Область, занятая средой, делится на четырехугольники сеткой $j - k$, которая движется вместе со средой. Для численного решения полученных дифференциальных уравнений применяется метод естественной аппроксимации производных. Записываются конечно — разностные соотношения для дифференциальных уравнений; учитываются поправки на поворот при определении компонент девиатора напряжений. Произвольное твердое тело разбивается на суперэлементы, на границах которых выполняются те или иные граничные условия. Осевое сечение тела разбивается на суперэлементы в виде четырехугольников. Даются типы суперэлементов и алгоритм определения узловых точек на границе и внутренней области суперэлемента [2].

6 Программа расчета

Для численного решения осесимметричных и плоских задач динамического взаимодействия упругих и упругопластических тел со средой с помощью конечно-разностных уравнений применяется программа «Динамика-2» [3]. Программа «Динамика-2» предназначена для исследования динамического взаимодействия упругопластических тел, определения полей напряжений и перемещений в различных конструкциях. Программа содержит справочники инструментальных и конструкционных материалов; суперэлементов, из которых состоит конструкция; конструкций, разбитых на суперэлементы; граничных условий; механизмов воздействия на материал; управляющих заданий; заданий на проведение расчетов. Выполняется рисование на экране суперэлементной модели конструкции, конечно-разностной сетки. Проводятся расчеты при начальном нагружении, нагружении после добавления слоя материала. Запись отдельных результатов расчетов в заданный момент времени или через заданное число итераций осуществляется в файл библиотеки результатов. Формируется отчет по результатам работы.

Программа «Динамика-2» позволяет проводить моделирование динамического взаимодействия упругих и упругопластических тел с учетом силы тяжести, вращения тел, исследовать влияние армирования, учитывать различные зависимости между гидростатическим давлением и относительным объемом в различных материалах.

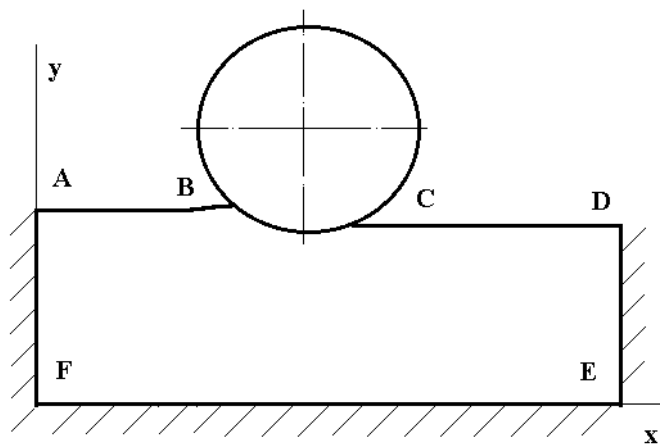
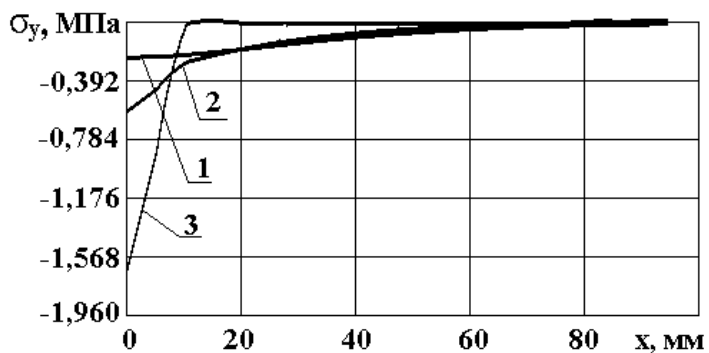
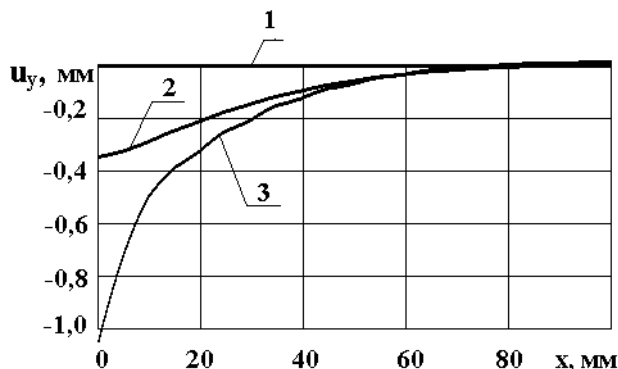


Рис. 1: Схема роликового уплотнения

Рис. 2: Распределение напряжений σ_y

Рис. 3: Распределение перемещений u_y по оси y

7 Результаты

Результаты расчетов некоторых тестовых задач: «численной сборки» составного цилиндра, «кинематической сборки» цилиндров с натягом сто микрон с получением статических решений методом установления приводятся в [2]. Программа применена для определения напряжений в составных матрицах и составном валке, в листовой заготовке при прокатке абсолютно жестким валком и в заготовке при листовой штамповке с помощью эластичной среды.

Деформирование дорожных покрытий из асфальтобетонных смесей исследуется в [5]. Рассматривается роликковое уплотнение асфальтобетонной смеси в области, ограниченной двумя гладкими вертикальными абсолютно жесткими стенками AF и DE, горизонтальной стенкой FE, где выполняется условие прилипания, свободными границами AB и CD, подвижной границей BC (Рис. 1). Роль подвижной границы играет ролик. Толщина недеформированной асфальтобетонной смеси равна 100 мм, за один проход ролик уплотняет асфальтобетонную смесь на 10 мм. Диаметр ролика равен 200 мм. Скорость его движения равна 0,1 м/с. На Рис. 2–3 приводится распределение напряжений σ_y и перемещений по оси y u_y для момента времени $t = 0,022$ с. Кривая 1 соответствует границе EF, кривая 3 — границе ABCD, кривая 2 соответствует середине границ ABCD и EF. Приведенная методика и программа позволяют решать также задачу уплотнения асфальтобетонной смеси при дополнительной подсыпке смеси.

Список литературы

- [1] Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. // В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике / М.: Мир, 1967. С. 212-263.
- [2] Мавлютов Р. Р., Хакимов А. Г. Большие перемещения упругих и упругопластических тел. Уфа: Изд-во БГУ, 1995. 268 с.
- [3] Мавлютов Р. Р., Хакимов А. Г. Динамика-2 — программа для решения осесимметричных и плоских задач // Программные продукты и системы. 1996. № 2. С. 44.
- [4] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИФМЛ, 1960. 244 с.
- [5] Абдуллин И. Б., Ахмадеев Н. Х., Хакимов А. Г. Осесимметричные и плоские задачи упругопластического деформирования асфальтобетонных смесей // Проблемы механики и управления: Сб. статей / Уфимский научный центр. Институт механики. Уфа: Гилем, 1996. С. 44-53.
- [6] Абдуллин И. Б., Абзалов К. А., Хакимов А. Г. Напряженно-деформированное состояние армированных оснований. Материалы Новоселовских чтений // Сб. научных трудов Всероссийской научно-технической конференции (Выпуск 1). Уфа: Издательство фонда содействия развитию научных исследований. 1999. С. 35-42.