



УДК 539.217.1+539.214

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ УЧЕТА АНИЗОТРОПИИ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ И ФОРМОЙ ЗЕРЕН МЕТАЛЛОВ

*В. Н. Никонов*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** В процессе изготовления деталей пластическим деформированием изменяется форма и ориентация зерен металлического материала. Появляющаяся механическая текстура вызывает анизотропию механических свойств материала. На основе анализа взаимодействия зерен на микроуровне получены уравнения состояния, описывающие механические свойства материала в широком температурно-скоростном диапазоне под действием знакопеременных нагрузок, состояние сверхпластичности, эффект Баушингера. Знание анизотропии, внесенной технологией изготовления детали, необходимо для численного анализа остаточных механических свойств деталей.

**Ключевые слова:** уравнения состояния, определяющие соотношения, зерна металла, ориентация зерен металла, форма зерен металла, анизотропия свойств, механическая текстура

---

В настоящее время физика металлов и металловедение достигли больших успехов в исследовании и описании структуры материала и ее эволюции в процессах термической обработки и пластической деформации. Однако данные исследования ограничиваются масштабным уровнем в пределах одного или нескольких зерен материала, а математическая запись результатов таких работ носит одномерный характер и не может быть применена механикой сплошных сред. Переход к трехмерному описанию эффективных свойств среды на некотором масштабном макроуровне требует рассмотрения коллективного взаимодействия всего ансамбля микроструктурных элементов, составляющих макроуровень [1].

Рассмотрим верхний после сплошной среды масштабный уровень — уровень зерен, ограничившись параметрами формы и ориентации зерен, полагая, что все зерна имеют одинаковый и постоянный объем. Параметр формы и ориентации зерна может быть введен в континуум следующим путем. Представим зерно как цилиндр длины  $a$  и поперечным размером  $c$ . Ориентация цилиндра определяется единичным вектором  $v$ , направленным вдоль оси цилиндра. Тогда параметром, определяющим форму и ориентацию зерна, может служить симметричный тензор

$$s_{ij} = v_i v_j \ln \frac{a}{c}. \quad (1)$$

Отметим, что вид выражения (1) не случаен и описывает зернограничное натяжение неравноосных зерен [2]. Тогда макроскопический тензор формы и ориентации зерна может быть получен усреднением микроскопического тензора  $s_{ij}$  по макрообъему

$$p_{ij} = \langle s_{ij} \rangle. \quad (2)$$

Для выполнения усреднения положим, что эффективное силовое поле, действующее на микроскопический элемент со стороны ансамбля микроэлементов в макрообъеме, членом которого данный микроэлемент является, пропорционально уровню внешних напряжений и действию внутренних сил, обусловленных формой и ориентацией ансамбля зерен

$$H_{ij} = \gamma \sigma_{ij} + \lambda (p_{ij} - \tilde{p}_{ij}), \quad (3)$$

где  $\gamma$  и  $\lambda$  являются параметрами материала,  $\tilde{p}_{ij}$  — является тензором хаотической (равномерной во всех направлениях в пространстве) ориентации зерен с формой, соответствующей тензору  $p_{ij}$ . Это выражение показывает, что зеренная структура может быть реорганизована как под действием внешних, так и внутренних сил, а внутренние силы могут отличаться от внешних сил. При хаотической ориентации зерен в макрообъеме  $p_{ij} = \tilde{p}_{ij}$  на микроэлемент действует только внешнее силовое поле  $\gamma \sigma_{ij}$ , где  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений. При наличии преимущественной ориентации зерен  $p_{ij} \neq \tilde{p}_{ij}$  в отсутствие внешнего силового поля внутренняя сила  $\lambda(p_{ij} - \tilde{p}_{ij})$  со стороны ансамбля зерен изменяет форму и ориентацию микроэлемента в направлении усредненной по ансамблю формы и ориентации, а сам ансамбль стремится к хаотической ориентации (пример — рекристаллизация структуры). Заметим, что в данной постановке выражение (3) ничего не говорит о

кинетике процесса или его скорости, а только определяет направление процесса.

Тогда выражение для энергии микроскопического элемента, определенной ориентацией и формой зерна в приближении самосогласованного поля может быть записано как

$$E = -H_{ij}s_{ij}. \quad (4)$$

В равновесии вероятность различных ориентаций микроскопических элементов соответствует  $\exp(-E/QT)$ , где  $QT$  — энергетический фон эволюции структуры [3]. Тогда функция нормального распределения имеет следующий вид

$$W = \frac{1}{Z} \exp \frac{s_{ij}H_{ij}}{QT}, \quad (5)$$

$$Z = \int \exp \frac{s_{ij}H_{ij}}{QT} d\bar{v}dV.$$

Выражение (5) содержит макроскопический тензор  $p_{ij}$ , который согласно (2) является средним с функцией распределения  $W$ . Отсюда получаем уравнение самосогласования для  $p_{ij}$

$$p_{ij} = \frac{1}{Z} \int s_{ij} \exp \frac{s_{ij}H_{ij}}{QT} d\bar{v}dV. \quad (6)$$

Термодинамическая стабильность пространственной ориентации зерен и их формы определяется минимумом свободной энергии. Выражение для части свободной энергии, зависящей от формы и ориентации зерен, может быть получено из рассмотрения эффективного силового поля  $H_{ij}$ , действующего на микроскопический элемент, как производной от макроскопической внутренней энергии  $U$  по тензору ориентации и формы  $p_{ij}$

$$H_{ij} = -\frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial p_{ij}}, \quad (7)$$

где  $n$  — количество зерен в макрообъеме.

Интегрируя (7), получаем с учетом (3)

$$U = -n \left( \gamma \sigma_{ij} p_{ij} + \frac{1}{2} \lambda p_{ij}^2 - \lambda p_{ij} \tilde{p}_{ij} \right). \quad (8)$$

Для вычисления свободной энергии воспользуемся определением энтропии через функцию распределения [4]

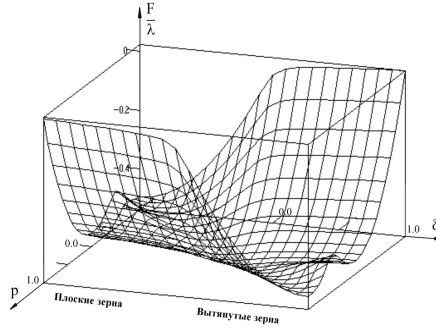


Рис. 1: Зависимость свободной энергии от ориентации и формы зерен в отсутствии напряжений и дефектов для низких температур

$$S = -n \langle \ln W \rangle . \quad (9)$$

Тогда часть свободной энергии, обусловленная формой и ориентацией зерен, есть

$$F = U - QTS . \quad (10)$$

С учетом (8), (9) и (5) после преобразования (10) получаем

$$F = n \left( \frac{1}{2} \lambda p_{ij} p_{ij} - QT \ln Z \right) . \quad (11)$$

Исследуем выражение для части свободной энергии, обусловленной формой и ориентацией зерен, для случая одноосной деформации. Тогда напряжение вдоль некоторой оси  $\sigma_{ij} = \sigma$ , усредненный параметр формы и ориентации  $p_{ij} = p$ , проекции направляющего вектора на ось растяжения (сжатия)  $v_i = v_j = \cos(\varphi)$ . Введем следующие обозначения и безразмерные параметры соответственно для формы зерна, ориентации зерна, параметра формы и ориентации, температуры и напряжения

$$\begin{aligned} \delta &= \ln(a/c) , \\ \Psi &= \cos^2(\varphi) , \\ s &= \Psi \delta , \\ \Theta &= QT/\lambda , \\ \Sigma &= \gamma\sigma/\lambda . \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда с учетом обозначений (12) выражение (11) преобразуется к виду

$$\frac{F}{\lambda n} = \frac{1}{2}p^2 - \Theta \ln \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\Psi(\varphi)\delta}{\Theta}\left(\Sigma + p - \frac{\delta}{2}\right)\right) d\varphi. \quad (13)$$

В (13), как может быть легко показано, хаотическая ориентация есть  $\tilde{p} = \delta/2$ .

На Рис. 1 показана зависимость части свободной энергии, зависящей от ориентации и формы зерен при низкой температуре и отсутствии внешнего напряжения. Параметр формы зерна  $\delta$  изменяется от  $-1$  до  $+1$ . При этом область определения функции  $\delta < 0$  соответствует плоским монетоподобным зернам, а область с  $\delta > 0$  соответствует вытянутым зернам. На графике функции свободной энергии хорошо просматривается ложбина, соответствующая минимальным значениям свободной энергии, проходящая по диагонали от начала координат. При этом абсолютный минимум свободной энергии соответствует точке  $\delta = 0$ ,  $p = 0$ . В областях низких и высоких значениях параметра формы  $\delta$  хорошо видны локальные максимумы, исчезающие в центральной части области определения и разделяющие на две части область низких значений свободной энергии. Причем для вытянутых зерен область низких значений свободной энергии, расположенная по диагонали области определения функции, соответствует ориентации зерен длинной стороной вдоль оси деформирования. Область низких значений свободной энергии, соответствующая более низким значениям  $p$  соответствует равномерной ориентации зерен в пространстве. Для плоских зерен — аналогично, но для ориентации плоской стороной. Вершины локальных максимумов, где производная  $\partial F/\partial p$  обращается в ноль, соответствуют метастабильной ориентации зерен. Заметим, что частные производные  $\partial F/\partial p$  и  $\partial F/\partial \delta$  являются термодинамическими силами, действующими на систему, когда значения  $p$  отличаются от равновесных [3]. Тогда этим силам можно поставить в соответствие физические механизмы реализации пластической деформации — зернограничное проскальзывание (ЗГП) и внутризеренное деформационное скольжение (ВДС) соответственно. Система под действием температуры, внешних механических напряжений, стремясь к минимуму свободной энергии, изменяет ориентацию и форму зерен в сторону наибольшего градиента свободной энергии при наличии кинетических возможностей реализации того или иного физического механизма деформации.

При действии растягивающих напряжений при низкой температуре (Рис. 2) область минимальной свободной энергии смещается по диагонали области определения в сторону высоких  $p$  и  $\delta$ . При этом второй

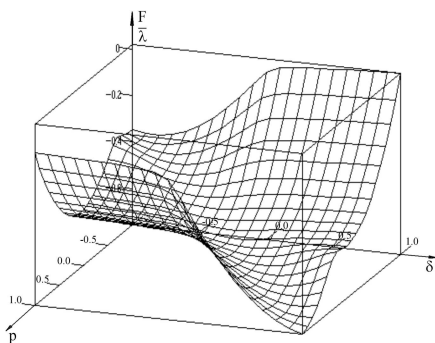


Рис. 2: Зависимость свободной энергии от ориентации и формы зерен в присутствии растягивающих напряжений для низких температур

минимум для вытянутых зерен, соответствующий равномерной ориентации зерен в пространстве, имеет значения свободной энергии намного выше абсолютного минимума. Высота локального максимума, разделяющего ориентации зерен вдоль оси и равномерную ориентацию, уменьшается. Таким образом, энергетический барьер для разворота вдоль оси растяжения неблагоприятно ориентированных зерен снижается. При этом неблагоприятно ориентированные вытянутые зерна могут приобрести ориентацию вдоль оси растяжения или разворачиваясь, преодолевая энергетический барьер (ЗГП), или вытягиваясь короткой стороной, изменяя форму ближе к равноосной (ВДС). В последнем случае в области значений  $\delta \sim 0$  зерна, незначительно развернувшись (ЗГП), удлиняются вдоль оси растяжения (ВДС). Зернам, имеющим более благоприятную ориентацию (почти вдоль оси), энергетически выгодно развернуться вдоль оси при незначительном изменении формы. Равноосным зернам энергетически выгодно растягиваться вдоль оси растяжения, следуя по градиенту свободной энергии по диагонали области определения. Для плоских (монетоподобных) зерен минимум свободной энергии, соответствующий ориентации плоскостью перпендикулярно оси, возрастает и таким зернам энергетически выгодно как удлинение вдоль оси, так и в большей степени разворот плоскостью поперек оси и удлинение в таком положении. Плоским зернам, ориентированным плоскостью не перпендикулярно оси растяжения выгоднее совершить разворот ребром вдоль оси и удлиняться в таком положении.

При высоких температурах в ложбине поверхности свободной энергии исчезают локальные максимумы метастабильных состояний. Наибольший градиент функции свободной энергии направлен по диагонали

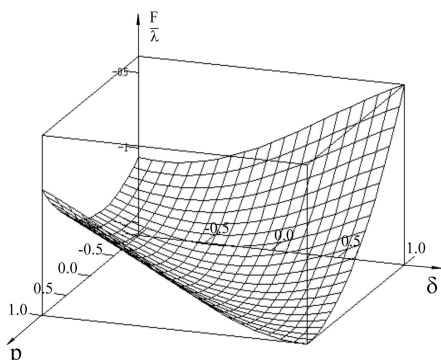


Рис. 3: Зависимость свободной энергии от ориентации и формы зерен в присутствии растягивающих напряжений для высоких температур

области определения от значений  $p = 0$  в области малых  $\delta$  к  $\delta = p$  в области больших  $\delta$ . Такая форма поверхности, например, для растяжения, показывает энергетическую выгодность разворота длинных зерен вдоль оси растяжения и их дальнейшее удлинение. Пример такой формы поверхности показан на Рис. 3.

Однако, в определенном температурном интервале при небольших напряжениях, на ложбине поверхности функции свободной энергии появляется энергетическая яма (локальный минимум), ориентированная не симметрично относительно диагонали области определения. На Рис. 4 показаны изолинии равных значений свободной энергии для растяжения небольшим напряжением. Для растяжения локальный минимум соответствует значениям  $\delta \approx 0.1 - 0.2$ , т.е. незначительно вытянутым по форме зернам. Локальный минимум неустойчив и исчезает с ростом напряжений или изменением температуры. Такой режим деформирования можно интерпретировать как сверхпластическую деформацию [4].

С точки зрения рассматриваемой модели суть аккомодационного механизма сверхпластичности можно трактовать следующим образом. Удлинение зерна при помощи ВДС, т.е. смещение формы и ориентации зерен по линии  $p = \delta$  в области определения функции свободной энергии, немедленно вызывает термодинамическую реакцию в системе - усиление ЗГП и разворот зерна поперек оси растяжения. Далее удлиненное зерно, вытягиваясь поперечным размером вдоль оси растяжения, проходит через равноосную форму (или близкую к ней) и все повторяется сначала. Флуктуационный переход зерен через энергетический барьер вызовет: попадание системы на поверхность свободной энергии типа показанной

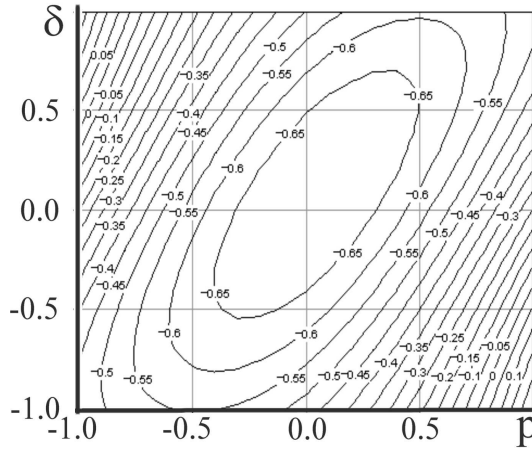


Рис. 4: Изолинии равных значений свободной энергии для режима сверхпластичности

на Рис. 3, включение в работу механизма ВДС и удлинение зерен. При этом система выходит из состояния сверхпластичности.

Рассмотрим необратимые процессы, связанные с пластической деформацией твердого тела, сопровождающейся изменением ориентации и формы зерен металла и построим уравнения состояния в приближении локального равновесия. Для этого представим выражение для объемной плотности свободной энергии в виде

$$\Phi = F + \mu \left( \varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \varepsilon_{ij}^e \delta_{ij} \right)^2 + \frac{1}{2} K (\varepsilon_{ij}^e)^2 \delta_{ij}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_{ij}^e$  — тензор упругой деформации,  $\mu$  и  $K$  — соответственно модули сдвига и объемного сжатия изотропного материала.

Для неравновесной ситуации считаем [3], что удельная внутренняя энергия  $U$  зависит от удельной энтропии  $S$ , а так же от  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $p_{ij}$  и  $\tilde{p}_{ij}$  как независимых термодинамических координат. Тогда уравнение Гиббса можно записать в виде

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{dS}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \frac{d\varepsilon_{ij}^e}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{dp_{ij}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_{ij}} \frac{d\tilde{p}_{ij}}{dt}. \quad (15)$$

Используя законы сохранения массы, импульса и полной энергии, являющихся общими для любого типа сплошных сред, можно получить следующее выражение для роста энтропии



$$TP_S = -\frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \Pi_{ij}^{(1)} \frac{dp_{ij}}{dt} - \Pi_{ij}^{(2)} \frac{d\tilde{p}_{ij}}{dt} \geq 0, \quad (16)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  — тензор скорости пластической деформации,  $q_i$  — вектор теплового потока,

$$P_S = \rho \frac{dS}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{T} \quad (17)$$

— производство энтропии, которое согласно второму началу термодинамики положительно для неравновесных процессов и равно нулю в равновесии, а

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \text{ и } \Pi_{ij}^{(2)} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{p}_{ij}} \quad (18)$$

— термодинамические силы, действующие на систему.

Удовлетворим условию знакоопределенности выражения (16), записав определяющие соотношения согласно теореме Онзагера [3] в виде следующей системы уравнений с учетом симметрии кинетических коэффициентов

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = -\lambda_{ik} \partial T / \partial x_k, \\ \sigma_{ik} = L_{iklm}^{(1)} \dot{\varepsilon}_{lm}^p - L_{iklm}^{(2)} \dot{p}_{lm} - L_{iklm}^{(3)} \dot{\tilde{p}}_{lm}, \\ \Pi_{ik}^{(1)} = L_{iklm}^{(2)} \dot{\varepsilon}_{lm}^p - L_{iklm}^{(4)} \dot{p}_{lm} - L_{iklm}^{(5)} \dot{\tilde{p}}_{lm}, \\ \Pi_{ik}^{(2)} = L_{iklm}^{(3)} \dot{\varepsilon}_{lm}^p - L_{iklm}^{(5)} \dot{p}_{lm} - L_{iklm}^{(6)} \dot{\tilde{p}}_{lm}, \end{array} \right. \quad (19)$$

и при условии положительной определенности коэффициентов

$$\lambda_{ik} > 0, \quad L_{iklm}^{(1)} > 0, \quad L_{iklm}^{(4)} > 0, \quad L_{iklm}^{(6)} > 0, \quad (20)$$

причем коэффициенты в общем случае зависят от  $p_{ik}$ ,  $\tilde{p}_{ik}$

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(p_{\alpha\beta}, \tilde{p}_{\alpha\beta}), \quad L_{iklm}^{(N)} = L_{iklm}^{(N)}(p_{\alpha\beta}, \tilde{p}_{\alpha\beta}), \quad N = 1..6, \quad (21)$$

т.е. являются квазилинейными.

В уравнениях состояния (19) анизотропия кинетических коэффициентов  $L_{iklm}^{(\alpha)}$ , вызываемая структурными параметрами  $p_{ik}$  и  $\tilde{p}_{ik}$ , описывает деформационную анизотропию механических свойств и появление металлографических текстур в деформируемом материале. Учитывая, что тензоры  $p_{ik}$  и  $\tilde{p}_{ik}$  симметричные, общий вид зависимости коэффициентов  $L_{iklm}^{(\alpha)}$  от  $p_{ik}$  и  $\tilde{p}_{ik}$  следующий:

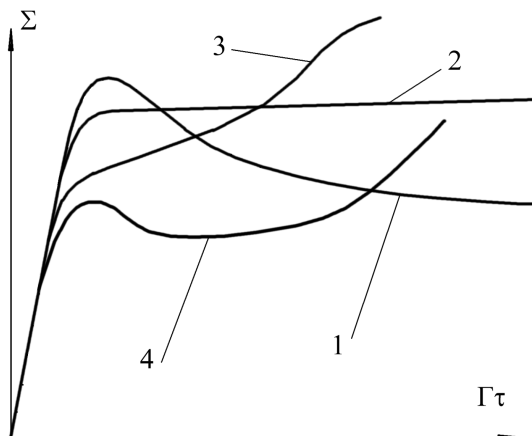


Рис. 5: Типичные формы кривых растяжения. Цифрами обозначено: 1 — идеально пластическая среда с начальной нестабильной ориентацией зерен, 2 — идеально пластическая среда, 3 — деформационно упрочняющаяся среда, 4 — деформационно упрочняющаяся среда с начальной нестабильной ориентацией зерен

$$L_{iklm}^{(\alpha)} = l^{(\alpha)} \delta_{ik} \delta_{jl} + l_1^{(\alpha)} ((p_{ik} - \tilde{p}_{ik}) \delta_{jl} + (p_{jk} - \tilde{p}_{jk}) \delta_{il}) + l_2^{(\alpha)} (p_{ij} - \tilde{p}_{ij}) (p_{kl} - \tilde{p}_{kl}), \quad (22)$$

где  $l^{(\alpha)}$ ,  $l_1^{(\alpha)}$ ,  $l_2^{(\alpha)}$  — феноменологические коэффициенты.

Ограничимся в (22) первым членом разложения и исследуем полученные уравнения состояния (19) для случая одноосного нагружения в изотермических условиях вдоль оси  $x$ , т.е.  $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma$ ,  $p_{xx} = p$ ,  $\tilde{p}_{xx} = \tilde{p}$ ,  $\Pi_{ij}^{(\alpha)} = \Pi_\alpha$ . При этом введем в дополнение к (12) следующие безразмерные параметры соответственно для термодинамических сил, скорости роста напряжения, скорости деформации, скорости роста параметра ориентации, скорости роста параметра формы:

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= \Pi_1/\lambda, \quad \Pi'_2 = \Pi_2/\lambda, \\ \dot{\Sigma} &= \gamma \dot{\sigma} / (\chi \lambda), \\ \Gamma &= G \gamma \dot{\epsilon} / (\chi \lambda), \\ \dot{\eta} &= \dot{p} / \chi, \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \dot{\tilde{p}} / \chi, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\chi$  — постоянная, зависящая от  $l_i^{(\alpha)}$  и модуля сдвига  $G$ .

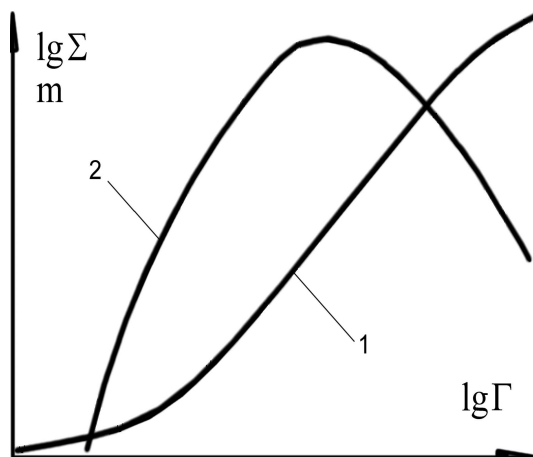


Рис. 6: Зависимость напряжения течения (кривая 1) и коэффициента скоростного упрочнения  $m$  (кривая 2) от скорости деформации

После преобразований (19) получаем для изотермических условий

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = \Sigma + D_1 \Pi'_1 + D_2 \Pi'_2 + \Gamma, \\ \dot{\eta} = C D_1 \Sigma + P \Pi'_1 + J \Pi'_2, \\ \dot{\dot{\eta}} = C D_2 \Sigma + \mathcal{J} \Pi'_1 + M \Pi'_2, \end{cases} \quad (24)$$

где  $C$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $P$ ,  $J$ ,  $M$  - постоянные, полученные при переходе от (19) к (24).

Система (24) исследовалась численно в широком диапазоне изменения температуры  $\Theta$ , скорости деформации  $\Gamma$ , для различных начальных значений параметров ориентации и формы. Как видно из Рис. 5, полученные уравнения состояния описывают широкий спектр материалов с различными свойствами. Введение в сплошную среду параметра, выражающего ориентацию зерен, позволяет объяснить пик на диаграмме растяжения в начальной стадии пластической деформации начальной ориентацией зерен, соответствующей нестабильному минимуму на поверхности свободной энергии при низких температурах. Для выхода ориентации из состояния локального нестабильного минимума требуются дополнительные затраты энергии, выражающиеся пиком на диаграмме растяжения. Свойство среды упрочняться объясняется совместным действием растущих термодинамических сил с отклонением формы зерен от равноосной, усиливающих рост термодинамических сил. Идеальная пластичность соответствует попаданию среды в область на поверхности

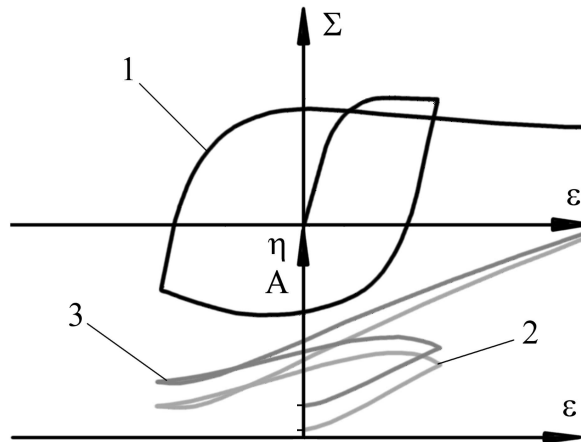


Рис. 7: Зависимость напряжения (кривая 1), ориентации (кривая 2) и формы зерен (кривая 3) от степени деформации при знакопеременном нагружении

свободной энергии, где энергетически выгодным является и разворот зерен (ЗГП) и их удлинение (ВДС), а удлинение зерен приводит к переходу в области с уменьшающимися термодинамическими силами, что компенсирует рост напряжений, т.е.  $D_1\Pi'_1 + D_2\Pi'_2 = -(\Sigma + \Gamma)$ .

В широком скоростном и температурном интервалах наблюдается примерно пропорциональная зависимость между напряжением и скоростью деформации в координатах  $\lg \Sigma - \lg(\Gamma)$  или  $\Sigma - \lg(\Gamma)$ . Для равноосных зерен, некоторого скоростного интервала  $\Gamma$  и более высокой температуры  $\Theta$  зависимость напряжения течения от скорости деформации носит сигмоидальный характер и показана на Рис. 6. Там же показана кривая коэффициента скоростного упрочнения  $m = d\lg \Sigma / d\lg \Gamma$ . Вид обеих кривых, соответствие состояния материала локальному минимуму на поверхности свободной энергии, показанному на Рис. 4, не изменяющийся размер равноосных зерен соответствуют режиму сверхпластической деформации [4].

Уравнения состояния (24) так же исследовались при знакопеременном нагружении в области низких температур. Начальная ориентация зерен принималась хаотичной (равномерно распределенной по всем направлениям), начальная форма зерна — слегка вытянутая с параметром  $\delta = 0.5$ . Полученная зависимость представлена на Рис. 7. Видно, что имеет место синхронное запаздывание смены ориентации и формы зерна. Эффект Баушингера не проявляется в условиях сверхпластичности

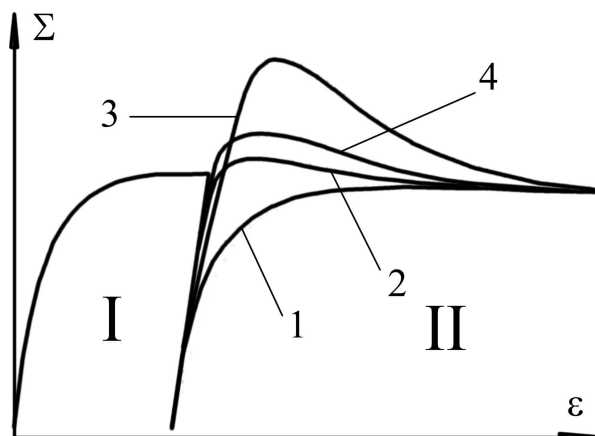


Рис. 8: Зависимость напряжения от степени деформации при повторном нагружении с различной ориентировкой оси растяжения. Зона *I* — первичное нагружение, зона *II* — повторное нагружение. Цифрами обозначено: 1 — растяжение в том же направлении, 2 — растяжение под углом  $30^\circ$ , 3 — растяжение под углом  $60^\circ$ , 4 — растяжение под углом  $90^\circ$

в связи с равновесной ориентировкой и формой зерен.

Уравнения состояния (24) исследовались при повторном нагружении образца растягивающим напряжением в направлениях под различными углами к оси первичного растяжения. Для этого тензор  $p_{ij}$  после разгрузки образца преобразовывался к новой системе координат. В новой системе координат состояние материала на поверхности свободной энергии, определяемое этими параметрами, изменяется. Соответственно, материал образца скачкообразно может перейти в нестабильное неравновесное состояние. При наличии энергетического барьера на поверхности свободной энергии требуется рост напряжения для преодоления барьера и перехода в более благоприятному состоянию.

Результаты моделирования повторного растяжения под углами  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$  приведены на Рис. 8. Видно увеличение напряжения при угле повторного растяжения  $60^\circ$ . При других углах поворота оси растяжения напряжение росло не столь существенно. Так для примера, показанного на Рис. 8, средний угол ориентации зерен перед повторной нагрузкой составлял около  $21^\circ$ . При повороте на  $60^\circ$  удлинившиеся в направлении старой оси растяжения зерна оказались в среднем ориентированы под углом около  $81^\circ$  к новой оси растяжения. Таким образом,

максимальный рост напряжения надо ожидать при повороте оси растяжения на  $69^\circ$ . Тем самым показано, что ориентационная анизотропия изменила первичную цилиндрическую поверхность пластичности Мизеса с окружностью в основании относительно координат главных напряжений. При преимущественной ориентации неравноосных зерен окружность в основании цилиндра Мизеса превращается в выпуклый неправильный эллипсоид.

Таким образом, на основе метода самосогласованного поля в сплошную среду внесены структурные параметры ориентации и формы зерен. Полученные на этой основе уравнения состояния качественно адекватно описывают поведение материалов в широком температурном и скоростном диапазонах. Возможность учета деформационной анизотропии механических свойств материала, процессов деформационного и термического упрочнения и разупрочнения дает возможность при применении полученных уравнений состояния производить модельные расчеты сложных технологических процессов с большими пластическими деформациями. Это так же позволяет прогнозировать остаточные механические свойства деталей, полученных путем пластического деформирования и исследовать влияние технологических параметров на остаточные механические свойства.

## Список литературы

- [1] Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
- [2] Мавлютов Р. Р., Куликов В. С., Никонов В. Н. Уравнения состояния среды с металлографической структурой. Уфа, 1997. (Препр. / УНЦ РАН).
- [3] Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 228 с.
- [4] Кайбышев О. А. Пластичность и сверхпластичность металлов. М.: Металлургия, 1975. 279 с.