



УДК 532.552

# МЕХАНИЗМ ВОЗБУЖДЕНИЯ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА<sup>1</sup>

*М. А. Ильгамов, Р. Л. Лукманов, Д. М. Зарипов*

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

**Аннотация.** Рассмотрены изгибные колебания в вертикальной плоскости горизонтальной трубы с жидкостью под воздействием гармонической волны давления в жидкости в случаях двух типов закрепления концов трубы. Исследовано влияние начального изогнутого положения трубы и частоты возбуждения на характер вынужденных и параметрических колебаний. Выявлены условия наступления нелинейного резонанса, а также возбуждения дальних гармоник. В зависимости от параметров задачи колебания системы меняются от периодических до хаотических.

**Ключевые слова:** трубопровод, внутреннее давление, возбуждение поперечных колебаний, вынужденные и параметрические колебания, периодические и хаотические режимы.

---

## 1 Введение

Исследование упругой статической устойчивости прямолинейной трубки и ее поперечных колебаний под действием внутреннего потока несжимаемой идеальной жидкости началось с работы [1]. В этой и последующих работах изучена роль центробежных и кориолисовых сил, обусловленных движением жидкости, кривизной упругой линии и поворотом поперечного сечения. Имеется обзор [2] по этой проблеме.

Влияние постоянного по времени давления в жидкости на устойчивость и характер колебаний трубки учитывалось в работе [3] и в последующих публикациях. Найдено, например, что критическое значение

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-97911)

внутреннего давления  $p_I$  в прямой трубе длиной  $L$ , внутренним радиусом  $r_0$  и изгибной жесткостью  $EI$ , шарнирно закрепленной по концам, с возможностью свободного осевого перемещения, равно

$$p_I = \frac{\pi EI}{(r_0 L)^2}. \quad (1)$$

При выводе (1) принято, что на концевые сечения  $\pi(r^2 - r_0^2)$  трубы давление не действует. Здесь  $r$  — внешний радиус трубы. Такой случай реализуется, например, для тонкостенной трубы, соединяющей две емкости.

Труба, закрытая на обоих концах днищами и подвижная в осевом направлении, абсолютно устойчива под действием внутреннего давления. Влияние внутреннего давления особенно значительно для статики и динамики гибких шлангов [4], вертикальных длинных труб [5, 6], а также бурильных колонн [7].

Нелинейной динамике статически выпученного стержня посвящено значительное количество работ, например, [8].

При достаточно сильном поперечном возбуждении выпученного стержня возможно возникновение как предельных циклов, так и хаотических поперечных колебаний. Режимы таких колебаний реализуются также в сжатой пластине, находящейся в сверхзвуковом потоке газа (флаттер) [9], и в других механических системах [10]. Общим для рассматриваемых систем является наличие в них взаимодействия бифуркаций и поперечных нелинейных колебаний.

В [11] осуществлен более точный учет влияния внутреннего давления на поперечные колебания консольной трубки, из которой вытекает жидкость. Действующие на стенки поперечные и продольные силы со стороны жидкости определяются в зависимости от отношения площадей отверстия плоского сопла, размещенного в выходном сечении и поперечного сечения трубки. Кроме того, построенная модель позволяет определить силу воздействия свободной струи жидкости на концевое сечение. Изучены флаттер вертикальной консольной трубки и хаотические колебания при возбуждении внешней поперечной силой.

Экспериментальные данные по пространственным колебаниям открытой трубы, находящейся под внутренним давлением газа, и сравнение с расчетами приведены в [12].

Нелинейные поперечные колебания трубопровода под воздействием бегущих волн давления в жидкости рассмотрены в [13, 14, 15]. Найдены режимы колебаний в зависимости от отношения длины волны давления

в жидкости и расстояния между опорами, радиуса и толщины стенки, коэффициента затухания, амплитуды волны давления.

В работах [16, 17] исследовано влияние длины волны давления и амплитуд ее постоянной и переменной частей, на характер колебаний. Разработан метод решения задачи, который применяется и здесь.

## 2 Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются изгибные колебания горизонтальной трубы, заполненной жидкостью, при различных условиях закрепления концов. Со стороны левой опоры распространяется гармоническая волна давления в жидкости. Средняя скорость движения жидкости в трубе принимается равной нулю. При изгибе трубы возникает боковая распределенная сила, зависящая от внутреннего давления. Предполагается, что давление не действует на торцевые сечения и поэтому не создает осевой силы. Принимается, что прогиб  $w(x, t)$  мал по сравнению с длиной трубы  $L$  между опорами, а угол поворота мал по сравнению с единицей. Используются известные допущения для тонких упругих тел.

С учетом инерционной силы общая распределенная боковая нагрузка на трубу со стороны жидкости равна [3, 11, 16]:

$$q = -m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \pi r_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где  $m = F\rho$ ,  $m_f = F_f\rho_f$ ,  $F = \pi(r^2 - r_0^2)$ ,  $F_f = \pi r_0^2$ ,  $r$ ,  $r_0$  — внешний и внутренний радиусы трубы,  $\rho$ ,  $\rho_f$  — плотности материала стенки и жидкости.

Избыточное давление в жидкости состоит из постоянной и переменной частей:

$$p(x, t) = p_0 + P \sin(\omega t - \alpha x). \quad (3)$$

Здесь  $\alpha = 2\pi/l = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$ ,  $c$ ,  $l$  — круговая частота, скорость звука и длина волны давления соответственно.

Нелинейное уравнение изгиба трубчатого стержня под действием поперечных сил имеет вид [9]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EF}{2L(1+\lambda)} \left( \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 + q, \quad (4)$$

где  $F$ ,  $I$  — площадь и момент инерции сечения,  $E$  — модуль упругости,  $\varepsilon$  — коэффициент трения,  $q_0 = g(m + m_f)$  — постоянная распределенная нагрузка на горизонтальную трубу,  $g$  — гравитационное ускорение.

При выводе (4) учтено, что опоры допускают перемещение трубы в осевом направлении. Соответствующий коэффициент линейно-упругой податливости опор обозначен через  $\lambda$ . Таким образом учтены граничные условия относительно осевого перемещения.

Принимается два типа граничных условий для функции прогиба:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (5)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (6)$$

В дальнейшем условия (5) будем называть краевыми условиями типа I, а (6) — типа II.

В качестве начальных условий берутся нулевые, если труба начинает движение из прямолинейного положения без начальной скорости. Будут рассматриваться и другие начальные условия, в том числе и те, которые соответствуют равновесному положению трубы под действием распределенной нагрузки  $q_0$  и статического внутреннего давления  $p_0$ .

После введения новых безразмерных переменных

$$\xi = \frac{x}{L}\pi, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{(m + m_f)}}, \quad W = \frac{w}{r}, \quad (7)$$

уравнение (4) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} - b \left( \int_0^\pi \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \\ + \varepsilon^* \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p^*(\xi, \tau) \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = f, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$b = \frac{r^2 F}{2I(1 + \lambda)\pi}, \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon \omega_0 L^4}{rEI\pi^4}, \quad f = \frac{gL^4(m + m_f)}{rEI\pi^4},$$

$$p^*(\xi, \tau) = p_0^* + p^* \sin \left( \frac{\omega}{\omega_0} \tau - \frac{\alpha L}{\pi} \xi \right), \quad p_0^* = \frac{p_0}{p_I}, \quad p^* = \frac{P}{p_I}, \quad p_I = \frac{\pi EI}{r_0^2 L^2}.$$

Граничные условия (5) и (6) принимают вид:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{или} \quad W = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0, \pi). \quad (9)$$

Кроме того, должны быть заданы начальные условия:

$$W = \varphi(\xi), \quad \frac{\partial W}{\partial \tau} = \psi(\xi) \quad (\tau = 0). \quad (10)$$

### 3 Метод решения

Для решения задачи (8)–(10) использована следующая итерационная процедура:

$$\frac{\partial^2 W^{k+1}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 W^{k+1}}{\partial \xi^4} = f + b \left( \int_0^\pi \left( \frac{\partial W^k}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 W^k}{\partial \xi^2} - \varepsilon^* \frac{\partial W^k}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p^*(\xi, \tau) \frac{\partial W^k}{\partial \xi} \right), \quad (11)$$

$$W^{k+1} = \frac{\partial^2 W^{k+1}}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{или} \quad W^{k+1} = \frac{\partial W^{k+1}}{\partial \xi} = 0, \quad (\xi = 0, \pi). \quad (12)$$

$$W^{k+1} = \varphi(\xi), \quad \frac{\partial W^{k+1}}{\partial \tau} = \psi(\xi), \quad (\tau = 0). \quad (13)$$

Для обоих типов граничных условий (12) может быть доказана сходимость этой процедуры в энергетических пространствах с любого начального приближения  $W^0(\xi, \tau)$ . Использовать процедуру (11)–(13) можно различными способами. Удобно строить аппроксимации Галеркина функций  $W^k(\xi, \tau)$  ортонормированной системой собственных функций оператора  $\partial^4/\partial \xi^4$ , подчиненных соответствующему граничному условию (12). В случае краевого условия (5) такую систему функций образуют

$$e_j(\xi) = \sqrt{2/\pi} \sin(j\xi), \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

а соответствующими собственными значениями являются  $\lambda_j = j^4$ .

Построим аналогичную систему функций в случае краевого условия (6). Сначала решим задачу на собственные значения

$$e^{(4)}(\xi) = \lambda e(\xi). \quad (15)$$

$$e(0) = e'(0) = e(\pi) = e'(\pi) = 0. \quad (16)$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$e(\xi) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} \xi + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \xi + C \cos \sqrt[4]{\lambda} \xi + D \sin \sqrt[4]{\lambda} \xi. \quad (17)$$

Тогда

$$e'(\xi) = \sqrt[4]{\lambda} \left( A \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} \xi + B \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} \xi - C \sin \sqrt[4]{\lambda} \xi + D \cos \sqrt[4]{\lambda} \xi \right).$$

Из условий  $e(0) = e'(0) = 0$  получаем  $0 = A + C$ ,  $0 = B + D$ , откуда

$$C = -A, \quad D = -B. \quad (18)$$

Условия  $e(\pi) = e'(\pi) = 0$  дают равенства

$$\begin{cases} 0 = A(\operatorname{ch} z - \cos z) + B(\operatorname{sh} z - \sin z), \\ 0 = A(\operatorname{sh} z + \sin z) + B(\operatorname{ch} z - \cos z), \end{cases} \quad (19)$$

где  $z = \sqrt[4]{\lambda\pi}$ .

Нетривиальное решение этой системы получается при условии равенства нулю определителя, т. е. если

$$(\operatorname{ch} z - \cos z)^2 - (\operatorname{sh}^2 z - \sin^2 z) = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} z \cos z = 1. \quad (20)$$

Таким образом, собственные значения  $\lambda_k$ , соответствующие задаче (15), (16), задаются равенством

$$\lambda_k = (z_k/\pi)^4, \quad (21)$$

где  $z_k$  — решения уравнения (20).

Будем считать, что  $z_k$  пронумерованы в порядке возрастания. Известна асимптотика  $z_k$ : при  $k \rightarrow \infty$   $z_k \rightarrow \pi/2 + \pi k$ . Соответствующие собственные функции задаются равенством (17) с постоянными  $A_k, B_k, C_k$  и  $D_k$ , определяющимися из соотношений (18) и (19). Так как система (19) имеет бесконечно много решений, то выберем одно из них, положив  $B = 1$ .

Тогда

$$A_k = \frac{\sin z_k - \operatorname{sh} z_k}{\operatorname{ch} z_k - \cos z_k}, \quad (22)$$

и собственные функции оператора  $\partial^4/\partial\xi^4$ , подчиненные граничным условиям (16), задаются равенствами:

$$\hat{e}_k(\xi) = A_k \left( \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda_k} \xi - \cos \sqrt[4]{\lambda_k} \xi \right) + \left( \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda_k} \xi - \sin \sqrt[4]{\lambda_k} \xi \right). \quad (23)$$

В силу самосопряженности оператора  $\partial^4/\partial\xi^4$  при краевых условиях (16) эти функции взаимноортогональны. Нормировав их, получим полную ортонормированную систему собственных функций:

$$e_k(\xi) = \frac{\hat{e}_k(\xi)}{\|\hat{e}_k(\xi)\|}, \quad \text{где} \quad \|\hat{e}_k(\xi)\| = \left( \int_0^\pi [\hat{e}_k(\xi)]^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Итак, в случае краевого условия типа II ортонормированная система собственных функций указанного оператора задается равенствами (23),

(24), а соответствующая система собственных значений — равенствами (21).

Обозначим через  $W_j^k(t)$  коэффициенты Фурье итерации  $W^k(\xi, \tau)$ , т.е.

$$W_j^k(\tau) = (W^k, e_j) = \int_0^\pi W^k(\xi, \tau) e_j(\xi) d\xi,$$

где  $e_j(\xi)$  задаются равенствами (14) в случае краевых условий типа I, и равенствами (23), (24) в случае краевых условий типа II.

Умножив обе части уравнения (11) на  $e_j(\xi)$  и проинтегрировав по отрезку  $[0, \pi]$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_j^{k+1}(\tau)}{d\tau^2} + \lambda_j W_j^{k+1}(\tau) = F_j - \varepsilon^* \frac{dW_j^k(\tau)}{d\tau} - \\ - b \int_0^\pi \left( \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_i'(\xi) \right)^2 d\xi \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) \int_0^\pi e_i''(\xi) e_j(\xi) d\xi - \\ - \int_0^\pi \frac{d}{d\xi} \left( p^*(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_i(\xi) \right) e_j(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $F_j = (f, e_j)$ .

Заметим, что для обоих типов краевых условий

$$\int_0^\pi e_i''(\xi) e_j(\xi) d\xi = e_i'(\xi) e_j(\xi) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi e_i'(\xi) e_j'(\xi) d\xi = -e_{ij}^{(1)},$$

где

$$e_{ij}^{(1)} = \int_0^\pi e_i'(\xi) e_j'(\xi) d\xi.$$

В случае краевых условий (5) первые производные собственных функций  $e_j(\xi)$  также взаимноортогональны:

$$e_{ij}^{(1)} = \int_0^\pi e_i'(\xi) e_j'(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} ij \int_0^\pi \cos(i\xi) \cos(j\xi) d\xi = i^2 \delta_{ij},$$

в силу чего

$$\int_0^\pi \left( \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_i'(\xi) \right)^2 d\xi = \sum_{i=1}^\infty i^2 (W_i^k(\tau))^2.$$

Матрица  $p_{ij}^*$  может быть подсчитана заранее:

$$p_{ij}^* = p_0^* e_{ij}^{(1)} + p^* \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha L}{\pi} \xi\right) e'_i(\xi) e'_j(\xi) d\xi - \\ - p^* \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \tau\right) \int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha L}{\pi} \xi\right) e'_i(\xi) e'_j(\xi) d\xi, \quad (26)$$

причем в случае краевых условий типа I интегралы можно вычислить явно.

В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 W_j^{k+1}(\tau)}{d\tau^2} + \lambda_j W_j^{k+1}(\tau) = F_j + R_j^k(\tau), \quad j = 1, 2, \dots, \infty, \quad (27)$$

$$W_j^{k+1}(0) = \Phi_j = (\varphi, e_j), \quad \frac{dW_j^{k+1}(0)}{d\tau} = \Psi_j = (\psi, e_j), \quad (28)$$

где

$$R_j^k(\tau) = -\varepsilon^* \frac{dW_j^k(\tau)}{d\tau} + b \int_0^\pi \left( \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e'_i(\xi) \right)^2 d\xi \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) e_{ij}^{(1)} + \\ + \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) p_{ij}^*, \quad (29)$$

причем в случае краевых условий (5)

$$R_j^k(\tau) = -\varepsilon^* \frac{dW_j^k(\tau)}{d\tau} - b \left( \sum_{i=1}^\infty i^2 [W_i^k(\tau)]^2 \right) j^2 W_j^k(\tau) + \sum_{i=1}^\infty W_i^k(\tau) p_{ij}^*. \quad (30)$$

Отметим, что вычисление  $R_j^k(\tau)_{ij}^*$  по формулам (30) (т.е. в случае краевых условий типа I) требует гораздо меньше объема вычислений, чем по формулам (29).

При численной реализации мы ограничиваемся конечным числом  $J$  собственных функций. Каждое из уравнений системы (27)–(28) решается явно:

$$W_j^{k+1}(\tau) = \tilde{W}_j(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^\tau \sin(\tau - z) \sqrt{\lambda_j} R_j^k(\tau) dz,$$

где

$$\tilde{W}_j(\tau) = \cos(\tau\sqrt{\lambda_j})\Phi_j + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\sin(\tau\sqrt{\lambda_j})\Psi_j + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}F_j\left[1 - \cos(\tau\sqrt{\lambda_j})\right].$$

На основе описанной методики была составлена программа для решения уравнения (8) с граничными условиями (9) и произвольными начальными условиями. При шагах  $\tau_1 \leq 0.1$  обычно требуется не более 3–5 итераций для вычисления коэффициентов Фурье  $W_j(\tau)$  решения.

## 4 Положения статического равновесия

Статический изгиб под собственным весом трубы с жидкостью и под действием внутреннего давления, приближенно описывается первой гармоникой. Соответствующее уравнение получается из (8), если в нем приравнять к нулю производные по времени и, умножив обе части на  $e_1(\xi)$ , проинтегрировать по отрезку  $[0; \pi]$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 W_1 \int_0^\pi e_1^2(\xi) d\xi - b W_1^2 \int_0^\pi [e_1'(\xi)] d\xi \cdot W_1 \int_0^\pi e_1''(\xi) e_1(\xi) d\xi + \\ + p_0^* W_1 \int_0^\pi e_1''(\xi) e_1(\xi) d\xi = f \int_0^\pi e_1(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

или

$$b_1 W_1 + b_3 W_1^3 = b_0, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 = \frac{gL^4(m + m_f)}{rEI\pi^4} \int_0^\pi e_1(\xi) d\xi, \quad b_1 = \lambda_1 - p_0^* e_{11}^{(1)}, \\ b_3 = b \left[ e_{11}^{(1)} \right]^2 = \frac{r^2 F}{2I(1 + \lambda)\pi} \left[ e_{11}^{(1)} \right]^2. \end{aligned}$$

В частности, в случае краевых условий типа I

$$b_1 = (1 - p_0^*), \quad b_3 = \frac{r^2 F}{2I(1 + \lambda)\pi}, \quad b_0 = \frac{2gL^4(m + m_f)}{rEI\pi^4} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (32)$$

Запишем (31) в виде:

$$W_1^3 + a_1 W_1 + a_0 = 0, \quad (33)$$

где  $a_1 = -b_1/b_3$ ,  $a_0 = -b_0/b_3$ .

Как известно, при  $Q = (a_1/3)^3 + (a_0/2)^2 > 0$  существует единственный действительный корень уравнения (33):

$$W_1^{(1)} = A + B, \quad A = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{Q}}.$$

При  $Q = 0$  имеются два действительных корня, один из которых совпадает с приведенным выше, а второй равен

$$W_1^{(2)} = -(A + B)/2.$$

В этом случае  $A = B = (-a_0/2)^{\frac{1}{3}}$  и потому

$$W_1^{(1)} = 2(-a_0/2)^{\frac{1}{3}}, \quad W_1^{(2)} = -W_1^{(1)}/2.$$

При  $Q < 0$  действительных корней три:

$$W_1^{(1)} = 2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \quad W_1^{(2,3)} = -2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right),$$

где

$$\cos \alpha = -\frac{a_0}{2\sqrt{-a_1/3}}.$$

Можно выписать формулу для критического значения  $p_0^*$ , при превышении которого появляются второе и третье статические положения равновесия:

$$p_{cr}^* = \left( \lambda_1 + 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{b_0 e_{11}^{(1)}}{2}\right)^2 \cdot b} \right) \frac{1}{e_{11}^{(1)}}. \quad (34)$$

В частности, для краевых условий типа I

$$p_{cr}^* = 1 + \frac{3L^2}{\pi^3 I} \sqrt[3]{\left(\frac{gL(m+m_f)}{E}\right)^2 \frac{F}{\pi(1+\lambda)}}, \quad (35)$$

а для краевых условий типа II

$$p_{cr}^* = 4.123 + 2.864 \frac{L^2}{\pi^3 I} \sqrt[3]{\left(\frac{gL(m+m_f)}{2E}\right)^2 \frac{F}{(1+\lambda)}}. \quad (36)$$

Отметим, что при одних и тех же параметрах системы критическое значение давления, при котором появляются дополнительные положения равновесия, для краевых условий типа II значительно выше, чем для случая краевых условий типа I. Например, при

$$L = 1\text{м}, \quad r_0 = 0.0095, \quad r = 0.01, \quad \rho_f = 1000\text{кг/м}^3, \quad \rho = 2700\text{кг/м}^3,$$

$$E = 6,9 \cdot 10^9 \text{Н/м}^2, \quad (37)$$

для краевых условий типа I  $p_{cr}^* = 1.92$ , а для краевых условий типа II  $p_{cr}^* = 4.93$ .

Всюду в дальнейшем будем считать, что корни  $W_1^{(i)}$  пронумерованы так, что величины  $W^{(i)} = W_1^{(i)} e_1(\pi/2)$ , задающие прогиб середины пролета в одночленном приближении по первой гармонике, были расположены в порядке убывания. Тогда  $W_1^{(1)}$  будет соответствовать нижнему положению равновесия,  $W_1^{(2)}$  — промежуточному и  $W_1^{(3)}$  — верхнему.

Численные эксперименты показывают, что нижнее и верхнее положения равновесия являются устойчивыми, а промежуточное — неустойчивым. В частности это проявляется в том, что при достаточном отличии от нуля положительного коэффициента  $\varepsilon^*$  происходит стабилизация свободных колебаний возле нижнего или верхнего положений равновесия, в зависимости от того, больше или меньше, чем  $W^{(2)}$  начальный прогиб середины пролета трубы (при нулевой начальной скорости).

Так, в случае краевых условий типа I при  $p_0^* = 2$  получаются корни  $W_1^{(1)} = 1.9688$ ,  $W_1^{(2)} = -0.6994$ ,  $W_1^{(3)} = -1.270$ , которым соответствуют прогибы середины пролета  $W^{(1)} = 1.571$ ,  $W^{(2)} = -0.558$ ,  $W^{(3)} = -1.013$ . Поэтому при запуске программы с параметрами  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 0.5$ ,  $p_0^* = 2$ ,  $p^* = 0$  и начальным прогибом середины пролета, равным  $-0.557$ , решение быстро стабилизируется возле нижнего положения равновесия, но уже при значении начального прогиба  $-0.56$  решение устанавливается возле верхнего положения равновесия.

Если трубу отклонить от положения устойчивого равновесия на малую величину, то при отсутствии трения устанавливаются периодические колебания малой амплитуды. Частоту таких колебаний можно оценить аналитически. Ограничившись в (8) лишь первой гармоникой, получим уравнение

$$\frac{d^2 W_1}{d\tau^2} + b_1 W_1 + b_3 W_1^3 = b_0. \quad (38)$$

Пусть  $W_1^0$  - коэффициент при первой гармонике одного из устойчивых положений равновесия (например,  $W_1^{(1)}$  или  $W_1^{(3)}$ ). Представим решение уравнения (38) в виде  $W_1(\tau) = W_1^0 + \bar{W}_1(\tau)$ , где  $\bar{W}_1(\tau)$  - периодическая функция малой амплитуды. Подставив это выражение в уравнение (38), получим:

$$\frac{d^2 W_1^0}{d\tau^2} + b_1 W_1^0 + b_3 (W_1^0)^3 + \frac{d^2 \bar{W}_1}{d\tau^2} + b_1 \bar{W}_1 + 3b_3 (W_1^0)^2 \bar{W}_1 + 3b_3 W_1^0 \bar{W}_1^2 + b_3 \bar{W}_1^3 = b_0.$$

Так как первое слагаемое левой части равно нулю, сумма второго и третьего равна  $b_0$ , а сумма последних двух имеет второй порядок малости по  $\bar{W}_1$ , то получаем следующее линеаризованное уравнение для  $\bar{W}_1$ :

$$\frac{d^2 \bar{W}_1}{d\tau^2} + b_1 \bar{W}_1 + 3b_3 (W_1^0)^2 \bar{W}_1 = 0. \quad (39)$$

Для  $\bar{W}_1(t)$  начальные условия принимают вид:

$$\bar{W}_1(\tau_0) = \varphi - W_1^0, \quad \left. \frac{d}{d\tau} \bar{W}_1(\tau) \right|_{\tau=\tau_0} = \psi. \quad (40)$$

Решение линейного уравнения (39) с постоянными коэффициентами с учетом начальных условий (40) выписывается явно:

$$\bar{W}_1(t) = \cos[(\tau - \tau_0)\omega_c](\varphi - W_1^0) + \frac{\sin[(\tau - \tau_0)\omega_c]}{\omega_c} \psi, \quad (41)$$

где

$$\omega_c = \sqrt{b_1 + 3b_3 (W_1^0)^2}. \quad (42)$$

Функция  $W_1(t)$ , отличаясь от  $\bar{W}_1(t)$  на постоянную величину  $W_1^0$ , имеет ту же частоту колебаний  $\omega_c$ .

Частота колебаний вблизи положения равновесия, подсчитанная по формуле (42), с большой точностью совпадает с результатами численных экспериментов.

## 5 Свободные нелинейные колебания

Проведем анализ зависимости свободных колебаний (т.е.  $p^* = 0$ ) при различных фиксированных значениях постоянного давления  $p_0^*$  от начального прогиба трубы, который позволит в дальнейшем объяснить резкие изменения в характере колебаний при периодическом изменении внутреннего давления.

Будем предполагать начальную скорость  $\psi(\xi)$  нулевой, а начальное отклонение имеющим вид  $\varphi(x) = h_0 e_1(\xi)/e_1(\pi/2)$ , т.е. берется приближение начального прогиба по первой гармонике.

Результаты численных экспериментов показали, что для обоих типов закрепления концов трубы имеют место одинаковые закономерности. В то же время при одних и тех же параметрах системы разные условия закрепления концов могут приводить к качественно разным сценариям колебаний.

На Рис. 5 даны графики зависимостей частот и крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба  $h_0$  для значений внутреннего давления  $p_0^*$ , равных 0.9, 1.9, 2.0 и 3.0 (принято  $\varepsilon^* = 0$ ) для краевых условий типа I. Когда начальный прогиб совпадает с положениями устойчивого равновесия, колебания не возбуждаются. При этих значениях начального прогиба мы приняли частоту колебаний равной соответствующему предельному значению частот. Увеличение модуля начального прогиба приводит к росту частоты колебаний. Поэтому существуют такие два значения начальных прогибов  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$  (первое из которых левее, а второе правее всех положений равновесия), в которых график частот имеет локальный минимум. Отметим, что чем больше величина давления  $p_0^*$ , тем резче меняется частота вблизи этих точек минимума.

Проанализируем графики зависимостей крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба  $h_0$ . Сначала рассмотрим случай  $p_0^* < p_{cr}^*$ . Как видно из Рис. 1(a) и (b), которые соответствуют значениям  $p_0^*$ , равным 0.9 и 1.9, для докритических значений внутреннего давления характерны следующие моменты.

Во-первых, график крайнего верхнего положения при  $h_0 < W^{(1)}$  и крайнего нижнего при  $h_0 < W^{(1)}$  образуют биссектрису первого координатного угла. Это означает, что начальное положение трубы в процессе колебаний остается одним из его крайних положений.

Во-вторых, вблизи единственного положения статического равновесия крайние положения середины пролета примерно равноудалены от него. Чем дальше от положения равновесия, тем сильнее это нарушается. Более того, когда начальное положение трубы достаточно удалено от положения статического равновесия, колебания происходят между первоначальным положением и положением, симметричным ему относительно горизонтали. Другими словами, при постепенном удалении начального положения трубы от ее положения равновесия происходит переход от колебаний, симметричных относительно положения равновесия к колебаниям, симметричным относительно горизонтали.

Обратим внимание на то, что величина  $W^{(1)}$  монотонно возрастает при увеличении  $p_0^*$ . При этом с увеличением  $p_0^*$  график становится все более крутым в переходной зоне между  $W^{(1)}$  и  $h_{cr}^+$ . Это обстоятельство является важным при исследовании хаотических колебаний под воздействием периодических волн давления, когда небольшие изменения давления вблизи критических зон приводят к качественному изменению характера колебаний.

Сказанное справедливо, в том числе, и при  $p_0^* > p_{cr}^*$ , но по особому

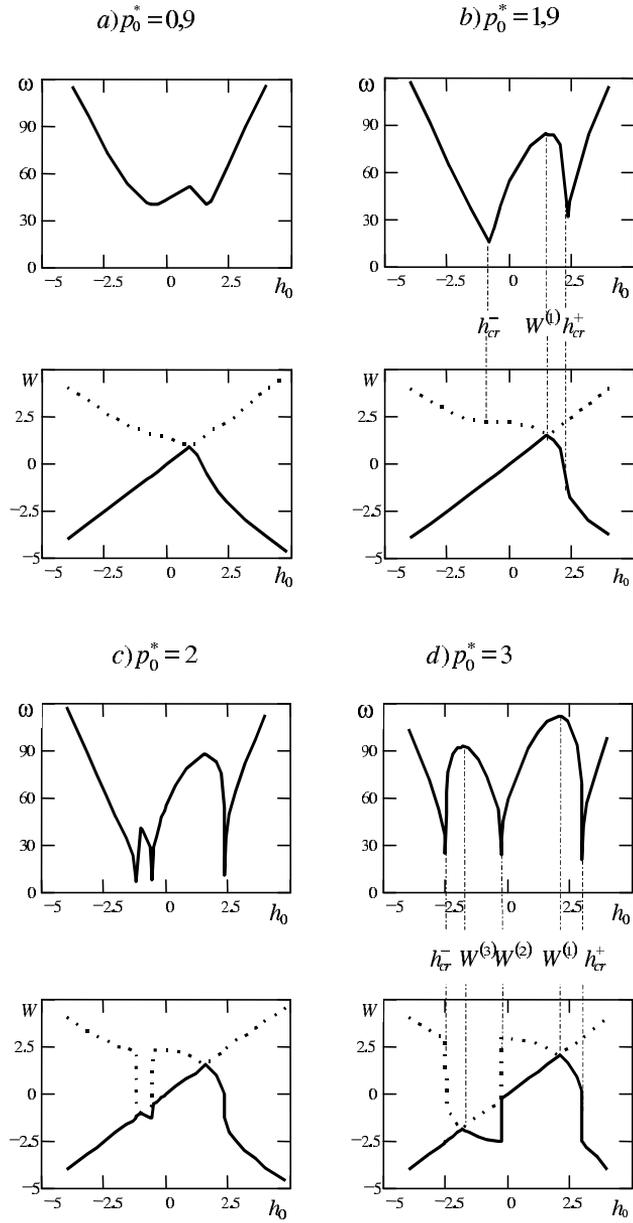


Рис. 1: Зависимость частоты колебаний и крайних положений трубы от начального прогиба для граничных условий типа I

проявляют себя дополнительные положения равновесия  $W^{(2)}$  и  $W^{(3)}$ , а также значения  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ . Как видно из Рис. 1 (с) и (d), в отличие от докритических значений внутреннего давления, в точках  $h_{cr}^-$ ,  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^-$  крайние положения середины пролета трубы меняются скачкообразно. Это говорит о том, что при  $p_0^* > p_{cr}^*$  есть больше возможностей для резкой смены характера колебаний при воздействии переменной волны давления.

Эти особенности системы будут рассмотрены в последующих разделах. Заметим, что при увеличении  $p_0^*$  значение  $h_{cr}^-$  уменьшается, а значение  $W^{(2)}$ , увеличиваясь, приближается к нулю. Поэтому увеличение постоянного внутреннего давления приводит к расширению зоны «провала»  $[h_{cr}^-, W^{(2)}]$ , в которой происходит резкая смена диапазона колебаний. При этом амплитуда колебаний в этой зоне также увеличивается.

Положения равновесия являются точками экстремума графика зависимости частоты свободных колебаний от величины начального прогиба. При  $p_0^* < p_{cr}^*$  единственное положение равновесия  $W^{(1)}$  является точкой минимума. При  $p_0^* > p_{cr}^*$  положения  $W^{(1)}$  и  $W^{(3)}$  дают точки максимума, а  $W^{(2)}$  - точку минимума.

Напомним, что второе и третье положения равновесия возникают только при  $p_0^* > p_{cr}^*$  (для принятых нами значений параметров трубы  $p_{cr}^* = 1.92$ ). Значения частот колебаний около положений устойчивого равновесия совпадают со значениями, подсчитанными по формуле (42).

Как видно из Рис. 1, при  $p_0^* > p_{cr}^*$  можно выделить три типа свободных колебаний. Первый тип, обозначим его  $T_1$ , включает в себя колебания возле нижнего положения равновесия  $W^{(1)}$ , между  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^+$  (здесь и в дальнейшем речь идет о колебаниях середины пролета трубы). Такие колебания устанавливаются при значении начального прогиба  $h_0 \in (W^{(2)}; h_{cr}^+)$ . При изменении начального прогиба от значения  $W^{(1)}$  до  $W^{(2)}$  амплитуда колебаний увеличивается от нуля до некоторого предельного значения. Когда  $h_0 < W^{(2)}$ , то есть начальное положение выше промежуточного положения равновесия, колебания происходят возле верхнего положения равновесия между  $W^{(2)}$  и  $h_{cr}^-$  (этот тип колебаний назовем  $T_2$ ). Такие колебания устанавливаются при  $h_0 \in (h_{cr}^-; W^{(2)})$ .

Переход от колебаний типа  $T_1$  к  $T_2$ , и наоборот, происходит при  $h_0 = W^{(2)}$ . При  $h_0 > h_{cr}^-$  колебания типа  $T_1$  также скачкообразно переходят в колебания типа  $T_3$  - почти симметричные относительно горизонтали и охватывающие  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ . При  $h_0 < h_{cr}^-$  происходит скачкообразный переход от колебаний типа  $T_2$  к  $T_3$ .

Итак, при каждом значении давления  $p_0^* > p_{cr}^*$  имеется три крити-

ческих значения начального прогиба  $h_0$ , при которых происходит качественное изменение типа колебаний. Это является определяющим в объяснении того, почему при периодическом изменении давления жидкости в трубе происходят резкие смены типов колебаний.

При  $p_0^* < p_{cr}^*$  имеется лишь одно положение равновесия и потому имеют место колебания только типов  $T_1$  и  $T_3$ , причем переходы от одного типа к другому плавные, а потому и деление на типы в этом случае условное.

Аналогичная ситуация имеет место и для условий закрепления концов типа II. Как видно из Рис. 2, при  $p_0^* > p_{cr}^*$  ( $p_{cr}^* = 4.93$ ), как и в случае краевых условий типа I, варьирование начального прогиба трубы приводит к резкому изменению траекторий колебаний.

Если сравнить Рис. 1 (d) и 2 (a), которые соответствуют одинаковым значениям  $p_0^*$ , но разным типам краевых условий, то можно сделать вывод о том, что при одинаковых параметрах системы, но разных условиях закрепления концов трубы, получаются качественно различные режимы колебаний.

## 6 О возбуждении резонансных колебаний

Выясним, когда малые колебания давления могут приводить к возникновению колебаний достаточно большой амплитуды около нижнего статического положения равновесия.

Пусть в начальный момент времени труба имела прогиб  $h_0 = W^{(1)}(p_0^*)$ , то есть находилась в нижнем положении равновесия, которое зависит не только от собственных весов трубы и жидкости, но и от величины внутреннего давления  $p_0^*$ . В силу того, что при статическом равновесии гармоники с номерами выше первого имеют гораздо меньшие амплитуды, чем первая, то можно считать, что первоначально возбуждена только она.

Заметим, что функция  $W^{(1)}(p_0^*)$  при фиксированных остальных параметрах системы является возрастающей, то есть чем больше постоянное давление  $p_0^*$ , тем ниже находится нижнее положение равновесия трубы. К примеру, в случае краевых условий типа I  $W^{(1)}(1) = 0.961$ ,  $W^{(1)}(2) = 1.571$ ,  $W^{(1)}(3) = 2.058$ .

Как показали численные эксперименты, для обоих типов закрепления концов резонанс может наступать только при условии кратности частоты колебаний давления  $\omega$  половине значения собственной частоты  $\omega_c = \omega(p_0^*, W^{(1)})$  вблизи нижнего положения равновесия. При этом

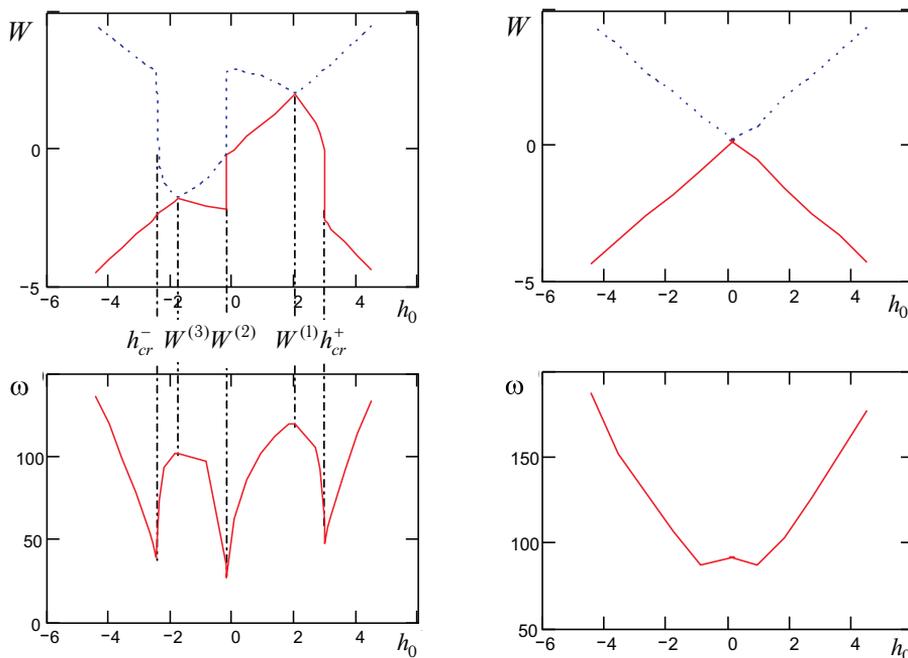


Рис. 2: Зависимость частоты колебаний и крайних положений трубы от начального прогиба для граничных условий типа II (слева —  $p_0^* = 5 > p_{cr}^*$ , справа —  $p_0^* = 3 < p_{cr}^*$ )

наиболее устойчивым к изменению частоты является резонанс при кратности 1.

Резонанс наблюдается также при значениях кратности 1/2 и 2, но при меньших значениях коэффициента трения  $\varepsilon^*$ , причем небольшое отклонение от резонансной частоты приводило к его исчезновению. Рис. 3 иллюстрирует вышесказанное в случае граничных условиях типа II.

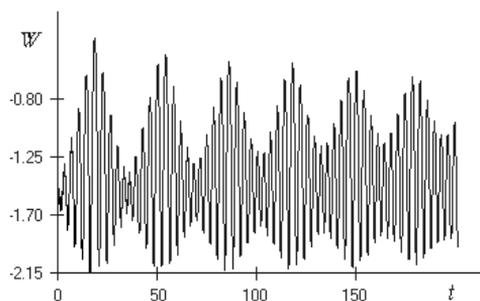
## 7 О возбуждении высших гармоник

В процессе колебаний может происходить обмен энергией между гармониками, причем он определяется величиной внедиагональных элементов матрицы  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^J$  и нелинейным членом в уравнении (8).

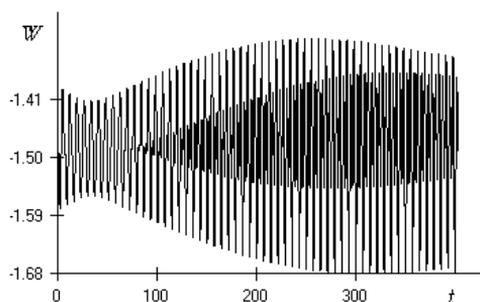
При длинах волн  $l$ , во много раз превосходящих длину трубы  $L$

$$\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}\tau - \frac{2L}{l}\xi\right) \approx \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}\tau\right),$$

$$a) p_0 = 5, p = 0.1, \varepsilon = 0.1, \omega = \omega_c = 92.02$$



$$b) p_0 = 5, p = 0.1, \varepsilon = 0.01, \omega = \frac{1}{2}\omega_c = 46.01$$



$$c) p_0 = 5, p = 0.1, \varepsilon = 0.01, \omega = 2\omega_c = 184.04$$

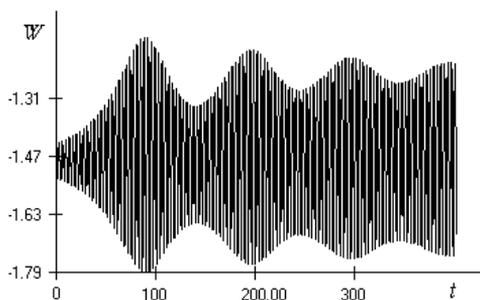


Рис. 3: Возникновение резонанса для граничных условий типа II

и матрица  $(p_{ij}^*)_{i,j=1}^J$  в случае граничных условий типа I будет близка к диагональной. Это означает, что при  $l \gg L$  обмен энергией между гармониками может происходить только за счет нелинейного члена уравнения (8).

Отметим, что в случае краевых условий типа I в разложении правой части уравнения (8) отсутствуют четные гармоники и поэтому их не будет и в разложении статических положений равновесия. При этом в силу того, что в случае граничных условий типа I собственные функции операторов  $\partial^4/\partial\xi^4$  и  $\partial^2/\partial\xi^2$  совпадают, нелинейный член не может инициировать возбуждения новых гармоник. По этой причине при  $l \gg L$  четные гармоники отсутствуют, если труба первоначально находилась в нижнем положении равновесия. Это подтверждается и результатами численных экспериментов.

В случае краевых условий типа II собственные функции операторов  $\partial^4/\partial\xi^4$  и  $\partial^2/\partial\xi^2$  не совпадают, поэтому и при  $l \gg L$  могут возбуждаться гармоники, отсутствующие в начальный момент времени, в частности, гармоники с четными номерами. Это подтверждается численными экспериментами и иллюстрируются Рис. 11 и 12.

Отметим, что величины  $l$  и  $L$  будут одного порядка (а значит, возможно возбуждение четных гармоник в случае краевых условий типа I), если велики частота колебаний давления  $\omega$  и (или) длина трубы  $L$ .

## 8 О влиянии частоты возбуждения и переменного давления на характер колебаний

Как показали численные эксперименты характер колебаний для обоих типов закрепления концов трубы очень сильно зависят от частоты волны давления  $\omega$ , постоянной части давления  $p_0^*$  и амплитуды переменной части  $p^*$ , причем небольшие изменения этих параметров могут приводить к качественно другим колебаниям. Это можно увидеть из рисунков.

Рис. 4 (а) иллюстрирует изменения характера колебаний в случае закрепления концов типа II при варьировании частоты  $\omega$  и давления  $p_0^*$ . Переменная часть давления при этом составляет четверть от постоянной. На осях отложены соответственно  $\omega/\omega_c$  и  $p_0^*/p_{cr}$ .

Всюду в дальнейшем считается, что труба стартует с нижнего положения равновесия. Как видим, при слишком малых значениях  $p_0^*$  (здесь при  $p_0^* < 0.6p_{cr}^*$ ) колебания практически не возбуждаются ни при каких частотах  $\omega$ , т.е. труба совершает колебания малой амплитуды вблизи нижнего положения равновесия. При последующем увеличении давле-

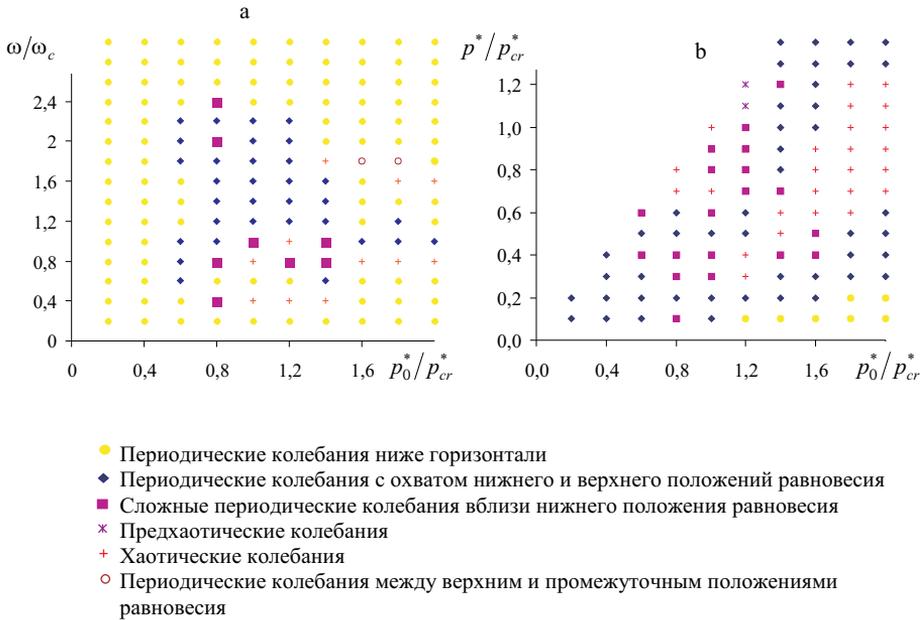


Рис. 4: а — Зависимость режимов колебаний от постоянной части давления и частоты возбуждения ( $L = 1, \varepsilon^* = 0.1, \omega_c = 120, p_{cr}^* = 4.93, p^* = \frac{1}{4}p_0^*$ ); б — Зависимость режимов колебаний постоянной и переменной частей давления ( $L = 1, \varepsilon^* = 0.1, \omega = \omega_c = 120, p_{cr}^* = 4.93$ )

ния  $p_0^*$  труба преодолевает зону притяжения нижнего положения равновесия, причем при недостаточно больших  $p_0^*$  это происходит вблизи резонансных частот ( $\omega/\omega_c = 0.5; 1; 2$ ). Последующее увеличение давления  $p_0^*$  приводит к тому, что труба может покинуть зону нижнего положения равновесия для достаточно широкого диапазона частот  $\omega$ . При этом варьирование частоты  $\omega$  при фиксированном значении  $p_0^*$  может приводить к резкому изменению характера колебаний.

Хаотические режимы колебаний возникают лишь при достаточно больших значениях  $p_0^*$ . При  $p_0^* + p^* < p_{cr}^*$  хаотические колебания для условий закрепления типа II не наблюдались, а для граничных условий типа I они возникали только при достаточно малых  $\varepsilon^*$  при  $p_0^* + p^*$  близких к  $p_{cr}^*$ .

Обратимся к Рис. 5, который соответствует прямой  $p_0^*/p_{cr}^* = 1.2$  Рис. 4 а) (начальная стадия колебаний на графиках пропущена). Как

видим, варьирование частоты  $\omega$  приводит к возникновению качественно различных режимов колебаний. При очень малых ( $\omega = 0.2\omega_c$ ) и больших ( $\omega = 2.4\omega_c$ ) частотах, не согласованных с собственной частотой  $\omega_c$ , труба не может покинуть зону нижнего положения равновесия, и колебания происходят с небольшой амплитудой.

В районах частот  $\omega = 0.4\omega_c$ ,  $\omega = 0.7\omega_c$  и  $\omega = \omega_c$  наблюдаются хаотические режимы колебаний с выходом над горизонталь. При этом в процессе колебаний возникают различные типы траекторий: вокруг верхнего и нижнего положений равновесия и с охватом обоих. В диапазоне частот  $\omega/\omega_c = [1.1; 1.8]$  происходят простые периодические колебания большой амплитуды с охватом нижнего и верхнего положений равновесия. Возле частот  $\omega = 0.5\omega_c$  и  $\omega = 0.8\omega_c$  наблюдаются более сложные периодические режимы. Колебания в диапазоне частот  $\omega/\omega_c = [2.2; 2.4]$  можно классифицировать как предхаотический режим. Интересны режимы колебаний при  $\omega/\omega_c = [1.9; 2]$  когда труба практически застывает над горизонталью. При частоте  $\omega = 0.6\omega_c$  труба не поднимается выше горизонтали и совершает простые периодические колебания.

Как видим, изменение частоты  $\omega$  приводит к резкому изменению характера колебаний, причем периодические колебания большой амплитуды могут сменить хаотические колебания или колебания малой амплитуды над горизонталью. Обратим также внимание на то, что присутствие различных типов траекторий при хаотических колебаниях хорошо объясняются графиками зависимости крайних положений трубы для свободных колебаний, приведенными в пункте 5. Они показывают, что небольшое изменение давления может привести к резкому изменению траектории движения трубы, что и наблюдается при хаотических режимах колебаний.

В случае граничных условий типа I в целом ситуация аналогичная. На Рис. 6 приведены фазовые картины для величин прогибов при различных значениях частоты  $\omega$ .

Особо выделим режим колебаний, возникающий при частоте  $\omega = 133$ , когда труба практически застывает над горизонталью между верхним и промежуточным положениями равновесия. На Рис. 7 дана динамика отклонения середины пролета трубы при  $\omega = 133$  и близком значении  $\omega = 131$ . Во втором случае труба то покидает указанную зону, то снова туда возвращается.

Отметим, что характерным для хаотических режимов является наличие области сплошного спектра мощности и не повторяющееся облако точек сечения Пуанкаре. На Рис. 8 приведены сечения Пуанкаре для случая граничных условий типа I с периодом стробоскопирования, рав-

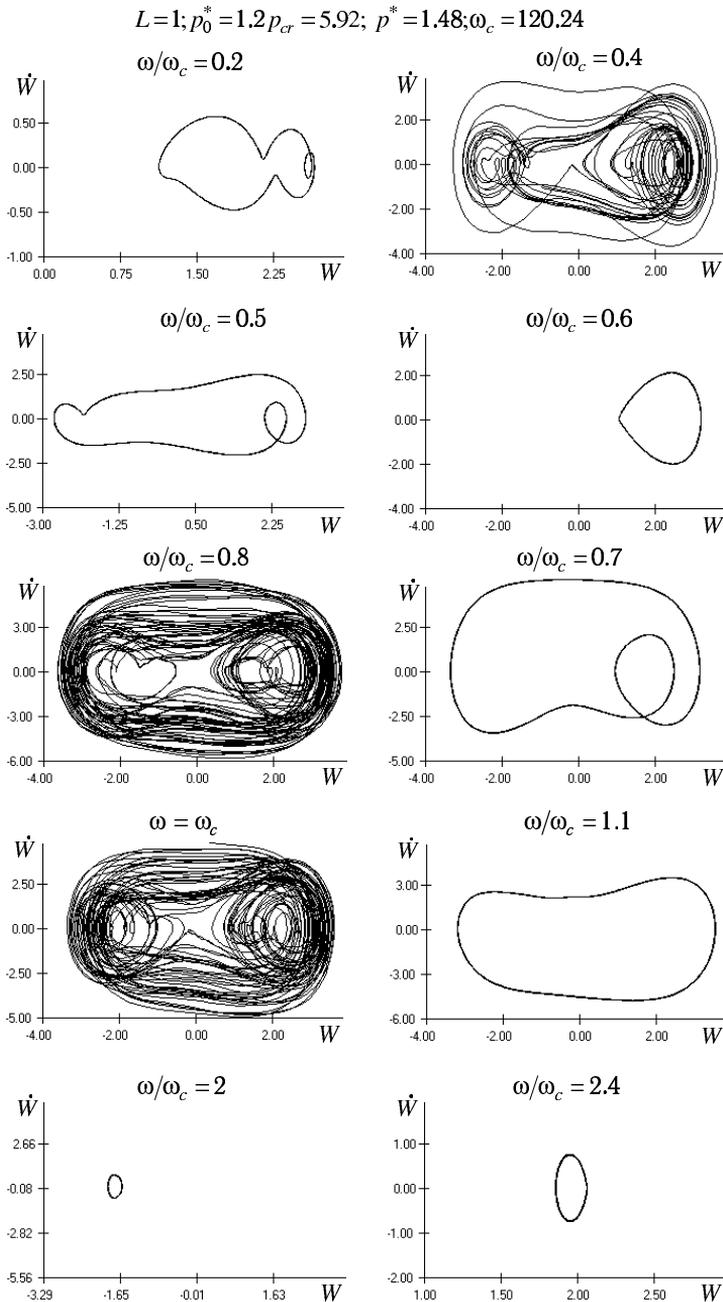


Рис. 5: Фазовые траектории колебаний середины пролета при варьировании частоты возбуждения для граничных условий типа II

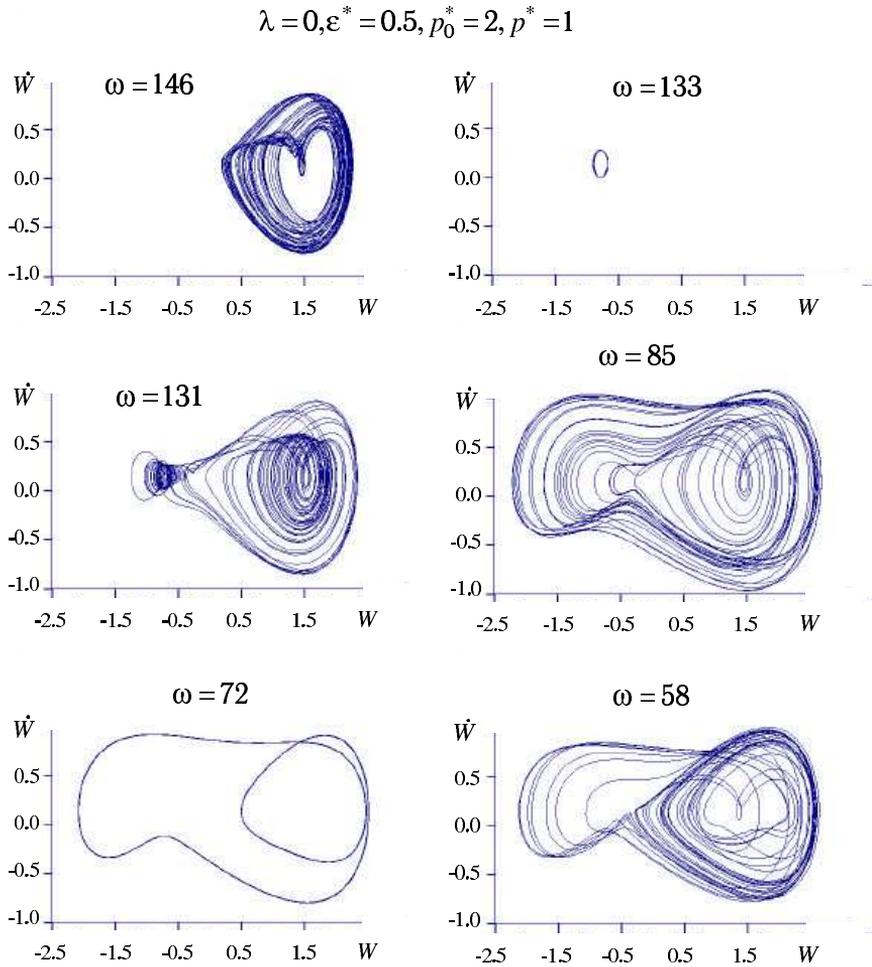


Рис. 6: Фазовые траектории колебаний середины пролета при варьировании частоты возбуждения для граничных условий типа I

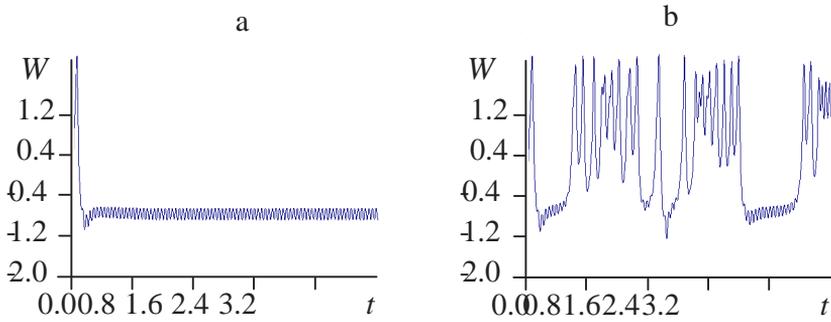


Рис. 7: Динамика отклонения середины пролета для граничных условий типа I (a —  $\omega = 133$ , b —  $\omega = 133$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 0.5$ ,  $p_0^* = 2$ ,  $p^* = 1$ )

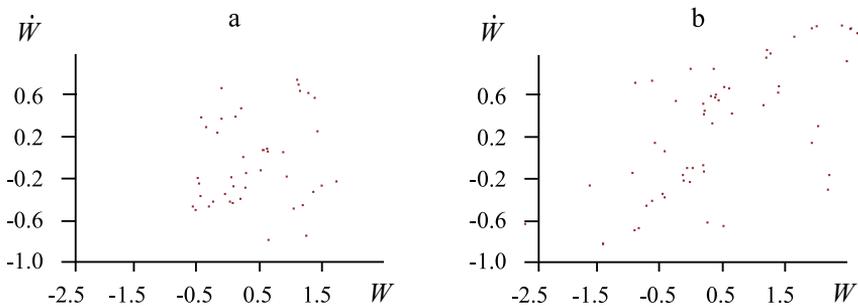


Рис. 8: Сечения Пуанкаре для граничных условий типа I (a —  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 0.1$ ,  $p_0^* = 1.3$ ,  $p^* = 0.5$ ,  $\omega = 72$ ; b —  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon^* = 1$ ,  $p_0^* = 3$ ,  $p^* = 1$ ,  $\omega = 96$ )

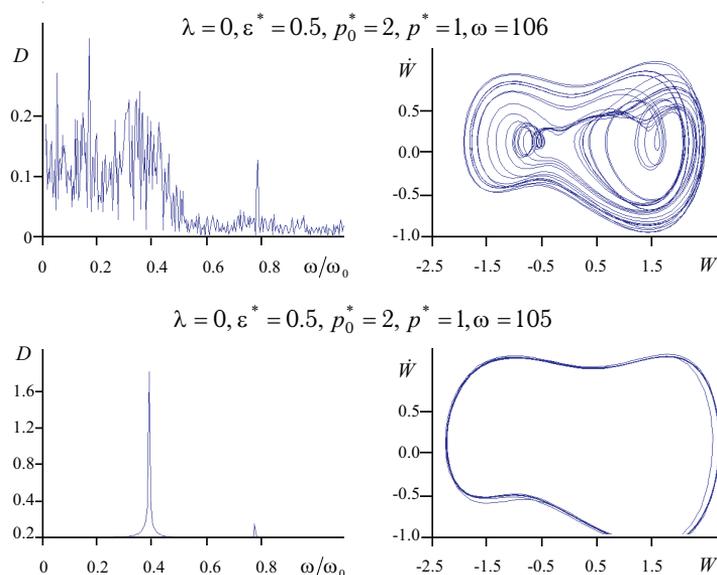


Рис. 9: Спектры мощности и фазовые картины для граничных условий типа I

ным периоду колебаний давления. На Рис. 9 даны спектры мощности при возбуждении хаотических и периодических колебаний для условий закрепления концов типа I.

Было проведено исследование зависимости характера колебаний трубы от соотношений между  $p_0^*$  и  $p^*$  при фиксированных значениях частоты возбуждения  $\omega$ . Как видим из Рис. 4 (b), варьирование доли  $p^*$  от  $p_0^*$  приводит к изменению режимов колебаний, причем при  $p_0^*$  в районе  $p_{cr}^*$  и выше наблюдается большее разнообразие.

На Рис. 10 приведены фазовые картины колебаний при фиксированных значениях частоты возбуждения  $\omega = \omega_c$ , постоянной части давления  $p_0^* = 1.2p_{cr}^*$  и различных  $p^*$ .

Гораздо менее разнообразны режимы колебаний при  $p_0^* < 0.8p_{cr}^*$ . Имеют место лишь периодические колебания. Мы объясняем это тем, что при  $p_0^* + p^* < p_{cr}^*$  не возникают верхнее и промежуточное положения равновесия, а потому не может происходить резкой смены траекторий движения трубы, как это было при  $p_0^* = 1.2p_{cr}^*$ .

Были проведены также численные эксперименты при различных значениях длины трубы  $L$ . Замечено, что с увеличением длины  $L$  больше

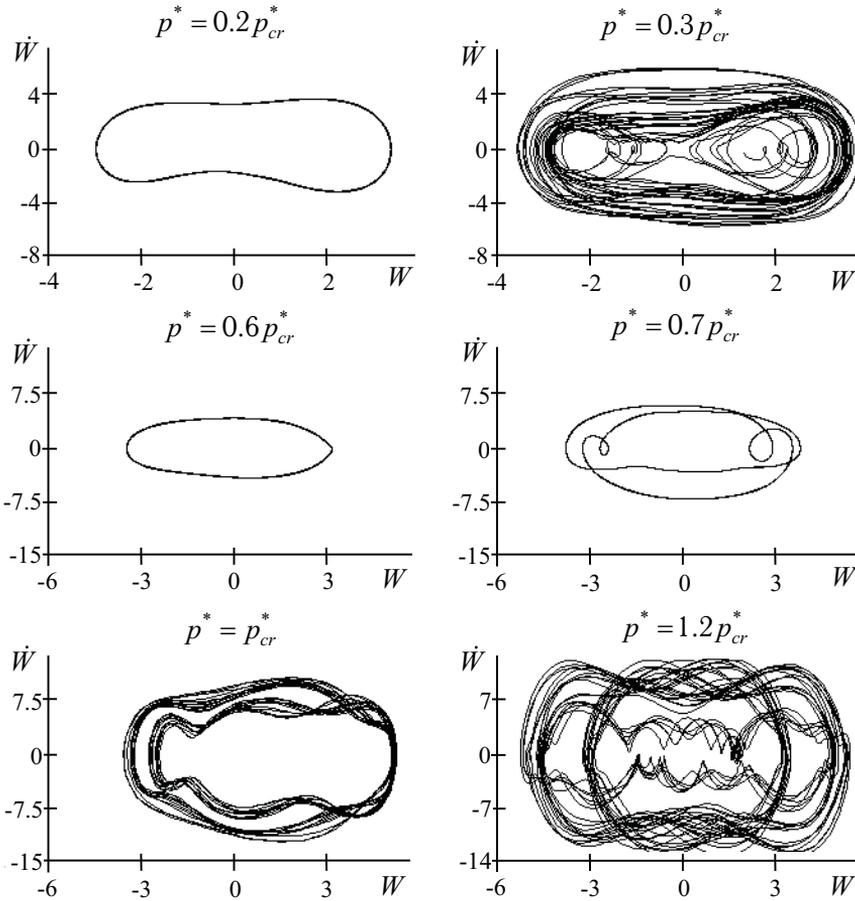


Рис. 10: Фазовые траектории колебаний середины пролета трубы при варьировании переменной части давления для граничных условий типа II ( $p_0^* = 1.2 p_{cr}^* = 5.92$ ,  $p_{cr}^* = 4.93$ ,  $\omega = \omega_c = 120.24$ )

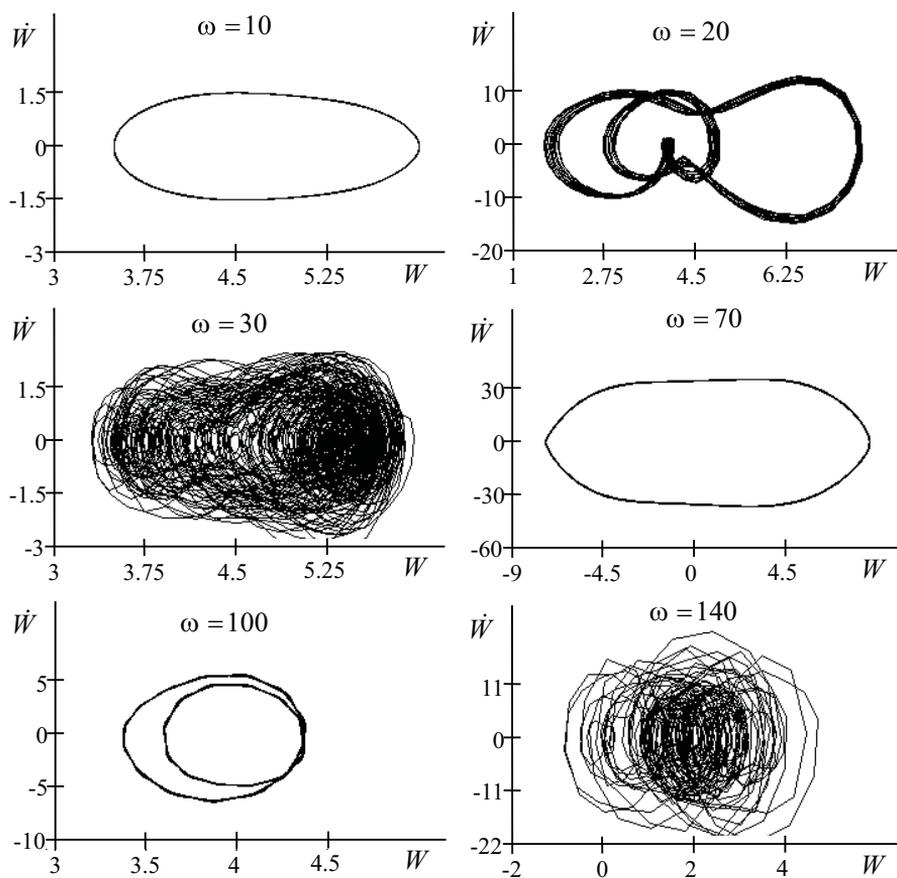


Рис. 11: Фазовые траектории середины пролета при варьировании частоты возбуждения для граничных условий типа II ( $L = 2.5$ ,  $p_0^* = p_{cr}^* = 13.43$ ,  $p^* = 1/2p_0^* = 6.71$ )

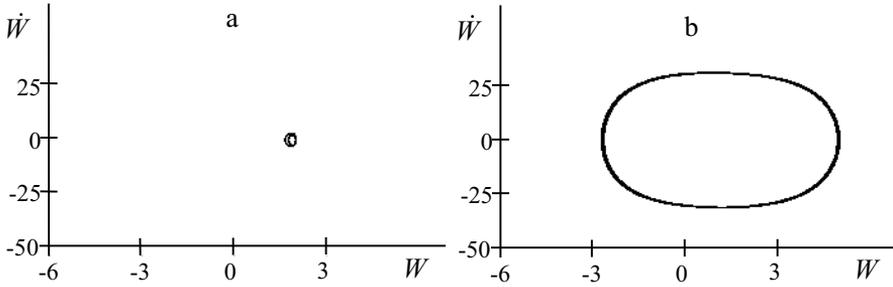


Рис. 12: Фазовые траектории середины пролета а — ( $\xi = \frac{1}{2}$ ) и точки б — ( $\xi = \frac{1}{4}$ ) для граничных условий типа II ( $L = 2.5$ ,  $p_0^* = p_{cr}^* = 13.43$ ,  $p^* = 1/2p_0^* = 6.71$ ,  $\omega = 150$ )

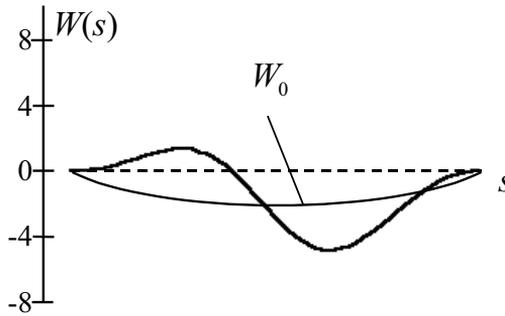


Рис. 13: Профиль трубы в фиксированный момент времени ( $L = 2.5$ ,  $p_0^* = p_{cr}^* = 13.43$ ,  $p^* = 1/2p_0^* = 6.71$ ,  $\omega = 140$ )

возбуждаются высшие, и в том числе четные, гармоники. В случае граничных условий типа II это происходит уже при  $L = 2.5$ .

На Рис. 11 приведены соответствующие фазовые картины прогиба середины пролета при различных значениях возбуждающей частоты. Отметим, что найдены значения частоты  $\omega$ , при которых середина пролета практически неподвижна, а другие точки трубы совершают колебания достаточно большой амплитуды; при этом сильно возбуждается вторая гармоника (Рис. 12 и 13).

## 9 Заключение

Рассмотрены изгибные колебания в вертикальной плоскости горизонтальной трубы с жидкостью под воздействием гармонической волны давления в жидкости в случаях двух типов закрепления концов трубы. Принимаются предположения о том, что средняя скорость движения жидкости в трубе равна нулю, давление не действует на торцевые сечения и потому не создает осевой силы, прогиб мал по сравнению с длиной трубы между опорами, а угол поворота мал по сравнению с единицей. При перечисленных предположениях колебания трубы описываются нелинейным дифференциальным уравнением (4), для решения которого предложена итерационная процедура (11)–(13), сходящаяся с любого начального приближения.

Для обоих типов закрепления концов трубы численные эксперименты продемонстрировали сильную зависимость характера колебаний от частоты возбуждения  $\omega$  и величин  $p_0^*$  и  $p^*$ , определяющих постоянную и переменную части давления. Варьирование любого из этих параметров может приводить к очень резкой смене характера колебаний. Это относится к обоим типам закрепления концов. Наиболее резкие изменения происходят при давлении  $p_0^*$  вблизи  $p_{cr}^*$  и выше. При этом наблюдаются и хаотические режимы колебаний.

Для объяснения наблюдавшихся эффектов исследована зависимость амплитуды и частоты свободных нелинейных колебаний (при постоянном давлении в жидкости и нулевой начальной скорости) от начального отклонения трубы. Если безразмерное внутреннее давление в жидкости  $p_0^*$  не превосходит критической величины  $p_{cr}^*$ , определяющейся формулой (34), то имеется одно нижнее положение статического равновесия  $W^{(1)}$ . Отклонение начального условия от этого положения равновесия приводит к увеличению амплитуды колебаний и уменьшению частоты. Такая ситуация сохраняется до тех пор, пока начальный прогиб  $h_0$  находится в диапазоне  $[h_{cr}^-, h_{cr}^+]$ . За пределами этого диапазона происходит монотонное увеличение частоты колебаний. При этом с увеличением отклонения начального положения трубы от положения равновесия  $W^{(1)}$  происходит постепенный переход от колебаний, симметричных относительно положения равновесия  $W^{(1)}$ , к колебаниям, симметричным относительно горизонтали (Рис. 1 (а), (б)).

Если  $p_0^* > p_{cr}^*$ , то появляются еще два положения равновесия, причем верхнее  $W^{(3)}$  — устойчивое, а промежуточное  $W^{(2)}$  — неустойчивое. Верхнее положение равновесия  $W^{(3)}$ , как и нижнее  $W^{(1)}$ , является точкой максимума графика зависимости частоты колебаний от начального

прогиба  $h_0$ . Промежуточное же положение  $W^{(2)}$  является точкой минимума.

В зависимости от того, выше или ниже промежуточного положения равновесия было начальное положение трубы, устанавливаются периодические колебания возле верхнего или нижнего положений равновесия. При этом в обоих случаях увеличение модуля начального прогиба приводит к установлению колебаний большой амплитуды, симметричных относительно горизонтали. В отличие от случая  $p_0^* < p_{cr}^*$ , при значениях начального прогиба, равных  $h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$ , происходит резкое изменение характера колебаний. Таким образом, при  $p_0^* > p_{cr}^*$  имеются три значения начального прогиба ( $W^{(2)}, h_{cr}^-, h_{cr}^+$ ), при которых происходит качественное изменение характера свободных нелинейных колебаний (Рис. 1 (с), (d)).

Получена формула (42) для определения частоты линейных колебаний вблизи положений равновесия.

Выявлены условия наступления резонанса. Наиболее четко выраженный резонанс наблюдается при частоте возбуждения  $\omega$ , близкой к собственной частоте колебаний  $\omega_c$ , причем при достаточно существенных отклонениях  $\omega$  от  $\omega_c$  резонанс сохраняется. Резонанс наступает также при  $\omega = 1/2\omega_c$  и  $\omega = 2\omega_c$ , однако в этих случаях он возникает только при достаточно малых значениях трения  $\varepsilon^*$  и пропадает при небольшом отклонении от резонансных частот.

Если амплитуда переменной волны давления  $p^*$  не мала, то при значениях частоты  $\omega$ , достаточно согласованных с частотой свободных колебаний  $\omega(p_0^*; W^{(1)})$ , могут возбуждаться хаотические колебания. Наиболее сложные режимы возникают при  $p_0^* + p^* > p_{cr}^*$ , когда друг друга сменяют колебания вокруг нижнего и верхнего положений равновесия и колебания большой амплитуды, симметричные относительно горизонтали. Резкие переходы от одного типа колебаний к другому объясняются разрывами графика зависимости крайних положений середины пролета трубы от начального прогиба при значениях начального прогиба, равных  $W^{(2)}, h_{cr}^-$  и  $h_{cr}^+$  (Рис. 1).

Отметим, что в случае граничных условий типа II критическое значение  $p_{cr}^*$  значительно выше, и поэтому, для возникновения хаотических режимов колебаний в этом случае необходимо большее значение давления.

Хотя при обоих типах закрепления концов трубы в целом имеют место одинаковые закономерности, при конкретных параметрах системы разные граничные условия дают и различные режимы колебаний. Кроме того, имеются различия в условиях возбуждения высших, в том числе

и четных, гармоник.

Настоящее модельное исследование может служить основой для анализа динамики в более сложных случаях, приближенных к реальным конструкциям трубопроводов.

## Список литературы

- [1] Ashley H., Haviland G. Bending vibrations of pipe line containing flowing fluid // *J. Appl. Mech.* 1950. V. 17, № 3. P. 229–232.
- [2] Paidoussis M. A. Flow-induced instabilities of cylindrical structures // *Appl. Mech. Rev.* 1987. V. 40, № 2. P. 163–175.
- [3] Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
- [4] Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 279 с.
- [5] Huang T., Dareing D. W. Buckling and frequencies of long vertical pipe // *J. Eng. Mech. Divis.* 1969. V. 95, № 1. P. 167–181.
- [6] Bernitsas M. M., Kokkinis T. Buckling of risers in tension due to internal pressure: nonmovable boundares // *Trans. ASME. J. Energy Resour. Technol.* 1983. V. 105, № 3. P. 277–281.
- [7] Султанов Б. З. Управление устойчивостью и динамикой бурильной колонны. М.: Недра, 1991. 208 с.
- [8] Holmes P. J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1979. № 1394. P. 419–448.
- [9] Dowell E. H., Ilgamov M. A. *Studies in nonlinear aeroelasticity.* New York-London-Paris-Tokyo: Springer—Verlag, 1988. 455 p.
- [10] Moon F. C. *Chaotic Vibrations.* New York: Wiley, 1987. 309 p.
- [11] Ilgamov M. A., Tang D. M., Dowell E. H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: the influence of internal pressure and nozzle discharge // *J. Fluids and Structures.* 1994. V. 8. P. 139–156.
- [12] Tang D. M., Ilgamov M. A., Dowell E. H. Buckling and postbuckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // *J. Appl. Mech.* 1995. V. 62, № 3. P. 595–600.

- [13] Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. Академии наук. Механика твердого тела. 1997. № 1. С. 181–192.
- [14] Ильгамов М. А., Мишин В. Н. Хаотические колебания горизонтальной трубы под действием бегущих волн в жидкости // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Казань, 1997. Вып. 1(5). С. 44–50.
- [15] Ильгамов М. А., Мишин В. Н. О влиянии скорости движения жидкости внутри трубопровода на характер его колебаний // Сб. Моделирование динамических процессов в сплошных средах / Изд. Каз. мат. общества. Казань. 1997. С. 88–95.
- [16] Ильгамов М. А., Лукманов Р. Л., Нелинейные колебания трубопроводов под действием бегущих волн в жидкости. Уфа. 1998. (Препр. / Уфимский государственный нефтяной технический университет; № 4. 50 с.)
- [17] Ilgamov M. A., Lukmanov R. L. Nonlinear vibrations of a pipeline under the action of pressure waves in fluid. // Proceedings of the Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference, Brest, France. 1999. P. 145–152.