УДК 31.36: 534.113

О возможности определения вида закрепления стержня по собственным частотам[1]

А. М. Ахтямов, В. В. Николаенко

Башкирский государственный университет, Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Аннотация. Рассматривается обратная задача отыскания характера закрепления одного из концов стержня, недоступного для непосредственного наблюдения, по собственным частотам его изгибных колебаний. Доказывается теорема единственности решения этой обратной задачи. Приводятся соответствующие контрпримеры.

Ключевые слова: собственные частоты, закрепление стержня

---

1 Введение

Настоящая работа посвящена решению обратных задач (см. [1–4]) и обобщает задачи в работах [5, 6].

Задача об изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega\, t)$ сводится (см., например, [7, 8]) к следующей спектральной задаче:

$$\begin{gathered} \alpha\, y^4 = \rho\, F\, \omega^2\, y, \\ U_1(y,\omega) = 0, \quad U_2(y,\omega) = 0, \quad V_1(y,\omega) = 0, \quad V_2(y,\omega) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u — функция прогиба, α — жесткость на изгиб, ρ — плотность, F — площадь сечения стержня, $U_i(y,\omega) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, y^{(j-1)}(0)$ $(i = 1,\, 2)$ — линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 0$ (на левом конце), $V_i(y,\omega) = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}\, y^{(j-1)}(1)$ $(i = 1,\, 2)$ — линейные формы,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00966)

характеризующие закрепление в точке $x = 1$ (на правом конце), а коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(\omega)$, $b_{ij} = b_{ij}(\omega)$ — полиномиально зависят от ω.

Поставим к этой спектральной задаче обратную: по собственным частотам изгибных колебаний стержня найти неизвестные линейные формы $U_1(y, \omega)$, $U_2(y, \omega)$.

Переформулируем теперь обратную задачу в другой постановке. Обозначим $\rho F \omega^2 / \alpha$ через λ^4. Тогда задача (1) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} y^{(4)} = \lambda^4 y, \\ U_1(y, \lambda) = 0, \quad U_2(y, \lambda) = 0, \quad V_1(y, \lambda) = 0, \quad V_2(y, \lambda) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $U_i(y, \lambda) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, y^{(j-1)}(0)$, $\quad V_i(y, \lambda) = \sum_{j=1}^{4} b_{ij}\, y^{(j-1)}(1)$ $\;(i = 1,\, 2)$, коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$, $b_{ij} = b_{ij}(\lambda)$ полиномиально зависят от λ.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij}, через A, а ее миноры — через A_{ij} :

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \qquad A_{ij} = \left| \begin{matrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{matrix} \right|,$$

а матрицу, составленную из коэффициентов b_{ij}, через B, а ее миноры — через B_{ij} :

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{matrix} \right\|, \qquad B_{ij} = \left| \begin{matrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{matrix} \right|.$$

Отыскание $U_1(y, \lambda)$, $U_2(y, \lambda)$ равносильно нахождению линейной оболочки $< \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 >$, построенной на векторах $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1,\, 2)$.

Были приведены различные случаи закрепления конца стержня [7–9]:

жесткое защемление

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

свободное опирание

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

свободный конец

$$A=\left\|\begin{array}{cccc}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right\|;$$

плавающая заделка

$$A=\left\|\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right\|;$$

пять разных видов упругого закрепления

$$A=\left\|\begin{array}{cccc}0&1&0&0\\c_1&0&0&1\end{array}\right\|,\qquad \left\|\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&-c_2&1&0\end{array}\right\|,\qquad \left\|\begin{array}{cccc}0&0&1&0\\c_1&0&0&1\end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{cccc}0&0&0&1\\0&-c_2&1&0\end{array}\right\|,\qquad \left\|\begin{array}{cccc}c_1&0&0&1\\0&-c_2&1&0\end{array}\right\|;$$

сосредоточенный инерционный элемент на конце

$$A=\left\|\begin{array}{cccc}-m\,\lambda^4&0&0&1\\0&-c\,\lambda^4&1&0\end{array}\right\|.$$

Заметим, что во всех десяти случаях

$$A_{14}\equiv 0,\qquad A_{23}\equiv 0. \tag{3}$$

Поэтому в терминах спектральной задачи (2) поставленная выше обратная задача формулируется следующим образом: неизвестны коэффициенты a_{ij} форм $U_1(y,\lambda)$ и $U_2(y,\lambda)$ задачи (2); известны: отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (2) и коэффициенты b_{ij} форм $V_1(y,\lambda)$ и $V_2(y,\lambda)$ задачи (2); известно также, что ранг матрицы A, составленной из коэффициентов a_{ij} равен двум; миноры A_{14} и A_{23} этой матрицы тождественно равны нулю; ранг матрицы B, составленной из коэффициентов b_{ij} форм $V_1(y,\lambda)$ и $V_2(y,\lambda)$ задачи (2) равен двум; миноры B_{14} и B_{23} матрицы B тождественно равны нулю; требуется восстановить линейную оболочку $<\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2>$ векторов $\mathbf{a}_i=(a_{i1},\,a_{i2},\,a_{i3},\,a_{i4})^{\mathrm{T}}$ (i=1, 2).

Условия (3) необходимы для единственности решения рассматриваемой обратной задачи. При их нарушении одному и тому же набору собственных значений могут соответствовать различные краевые условия.

2 Единственность решения обратной задачи

Наряду с задачей (2) рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{gathered} y^{(4)} = \lambda^4 y, \\ \widetilde{U}_1(y,\lambda)=0, \quad \widetilde{U}_2(y,\lambda)=0, \quad V_1(y,\lambda)=0, \quad V_1(y,\lambda)=0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\widetilde{U}_i(y,\lambda)=\sum_{j=1}^{4}\widetilde{a}_{ij}\,y^{(j-1)}(0)\ \ (i=1,\,2)$, $\widetilde{a}_{ij}=\widetilde{a}_{ij}(\lambda)$ — полиномы λ.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $\widetilde{a}_{ij}$ через $\widetilde{A}$, а ее миноры — через $\widetilde{A}_{ij}$:

$$\widetilde{A}=\left\| \begin{matrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} \end{matrix} \right\|, \qquad \widetilde{A}_{ij}\equiv \left| \begin{matrix} \widetilde{a}_{1i} & \widetilde{a}_{1j} \\ \widetilde{a}_{2i} & \widetilde{a}_{2j} \end{matrix} \right|.$$

Через $<\widetilde{\mathbf{a}}_1, \widetilde{\mathbf{a}}_2>$ обозначим линейную оболочку векторов $\widetilde{\mathbf{a}}_i = (\widetilde{a}_{i1},\,\widetilde{a}_{i2},\,\widetilde{a}_{i3},\,\widetilde{a}_{i4})^{\mathrm{T}}\ (i=1,\,2)$.

Теорема о единственности решения обратной задачи. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank} B = 2 \tag{5}$$

$$A_{14}\equiv A_{23}\equiv \widetilde{A}_{14}\equiv \widetilde{A}_{23}\equiv B_{14}\equiv B_{23}\equiv 0. \tag{6}$$

Если отличные от нуля собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи (2) и отличные от нуля собственные значения $\{\widetilde{\lambda}_k\}$ задачи (4) совпадают с учетом их кратностей, то линейные оболочки $<\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2>$ и $<\widetilde{\mathbf{a}}_1,\,\widetilde{\mathbf{a}}_2>$ совпадают, если, и только, если выполняется одно из условий

$$B_{12}\not\equiv 0, \quad B_{34}\not\equiv 0. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что функции

$$\begin{aligned} y_1(x,\,\lambda) &= (\,\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x)/2 \\ y_2(x,\,\lambda) &= (\,\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x)/(2\lambda) \\ y_3(x,\,\lambda) &= (\,-\cos\lambda\,x + \mathrm{ch}\lambda\,x)/(2\lambda^2) \\ y_4(x,\,\lambda) &= (\,-\sin\lambda\,x + \mathrm{sh}\lambda\,x)/(2\lambda^3) \end{aligned} \tag{8}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(4)}(x,\lambda)=\lambda^4\,y(x,\lambda), \tag{9}$$

удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \qquad j,\, r = 1,\, 2,\, 3,\, 4 \tag{10}$$

(другими словами, решения $y_j(x,\,\lambda)$ ($j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$) образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [7]).

Характеристическим определителем краевой задачи при $\lambda \neq 0$ является следующая функция:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ V_1(y_1) & V_1(y_2) & V_1(y_3) & V_1(y_4) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & V_2(y_3) & V_2(y_4) \end{vmatrix}$$

(здесь учтены условия (10)).

Используя для вычисления $\Delta(\lambda)$ известные свойства определителей, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \;\; = \;\; & B_{12}\,\Delta_{12}(\lambda) + B_{13}\,\Delta_{13}(\lambda) + B_{14}\,\Delta_{14}(\lambda) + \\ & + B_{23}\,\Delta_{23}(\lambda) + B_{24}\,\Delta_{24}(\lambda) + B_{34}\,\Delta_{34}(\lambda), \end{aligned} \tag{11}$$

где:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ y_1^{(i-1)}(1,\lambda) & y_2^{(i-1)}(1,\lambda) & y_3^{(i-1)}(1,\lambda) & y_4^{(i-1)}(1,\lambda) \\ y_1^{(j-1)}(1,\lambda) & y_2^{(j-1)}(1,\lambda) & y_3^{(j-1)}(1,\lambda) & y_4^{(j-1)}(1,\lambda) \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Вычисляя с помощью теоремы Лапласа определители (12) и подставляя в (11) с учетом равенств (8), а также условия (6) теоремы, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \;\; \equiv \;\; & (B_{12}\,A_{12} + \lambda^8\,B_{34}\,A_{34})\,\frac{\xi^-(\lambda)}{2\lambda^4} + \\ & + ((B_{13} + \lambda^4\,B_{34})\,A_{13} + B_{13}\,(A_{12} - \lambda^4\,A_{34}))\,\frac{\eta^+(\lambda)}{2\lambda^3} - \\ & - (B_{13}\,A_{13} - \lambda^4\,B_{24}\,A_{24})\,\frac{\zeta_0(\lambda)}{\lambda^2} + \\ & + ((B_{12} - \lambda^4\,B_{34})\,A_{24} - B_{24}\,(A_{12} - \lambda^4\,A_{34}))\,\frac{\eta^-(\lambda)}{2\lambda} - \\ & - (B_{13}\,A_{24} + B_{24}\,A_{13})\,\zeta_1(\lambda) + (B_{12}\,A_{34} + B_{34}\,A_{12})\,\frac{\xi^+(\lambda)}{2}, \end{aligned} \tag{13}$$

где:

$$\xi^{\pm}(\lambda) = 1 \pm \cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda, \qquad \eta^{\pm}(\lambda) = -\sin\lambda\,\mathrm{ch}\lambda, \pm\cos\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda$$
$$\zeta_0 = \sin\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda, \qquad \zeta_1 = \cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda.$$

Обозначим характеристический определитель задачи (4) через $\widetilde{\Delta}(\lambda)$.

Отличные от нуля собственные значения задач (2) и (4) являются корнями целых функций $\Delta(\lambda)$ и $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ (см. [10]).

Определители $\Delta(\lambda)$ и $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ помимо корней, совпадающих с отличными от нуля собственными значениями задачи, могут иметь также корень $\lambda = 0$ конечной кратности.

Так как $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ и $\widetilde{\Delta}(\lambda) \not\equiv 0$, то из факторизационной теоремы Адамара (см. [11]) следует, что характеристические определители $\Delta(\lambda)$ задачи (2) и $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ задачи (4) связаны соотношением:

$$\Delta(\lambda) \equiv C\,\lambda^k\,e^{a\,\lambda}\widetilde{\Delta}(\lambda),$$

где a — некоторое действительное число, k — некоторое целое неотрицательное число, а C — некоторая отличная от нуля постоянная. Отсюда следует, что правая часть соотношения (13) при замене A_{ij} на $A_{ij} - C\,\lambda^k\,e^{a\,\lambda}\widetilde{A}_{ij}$ тождественно равна нулю (тождество А).

Заметим, что число a в этом тождестве равно нулю. Действительно, предположим противное: $a \neq 0$. Тогда функции $\xi^{\pm}(\lambda)$, $\eta^{\pm}(\lambda)$, $\zeta_0(\lambda)$ и $\zeta_1(\lambda)$, а также эти же функции, умноженные на $e^{a\,\lambda}$, являются полиномиально независимыми. (Функции $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $\ldots$ $f_n(\lambda)$ называем полиномиально независимыми, если их комбинация

$$P_1(\lambda)\,f_1(\lambda) + P_2(\lambda)\,f_2(\lambda) + \cdots + P_n(\lambda)\,f_n(\lambda)$$

с произвольными полиномами $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$, $\ldots$ $P_n(\lambda)$ тождественна равна нулю только в том случае, когда $P_k(\lambda) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.) Полиномиальная независимость этих функций следует из полиномиальной независимости соответствующих экспонент. Отсюда и из тождества А получаем тождества:

$$\begin{aligned}
B_{12}\,A_{12} + \lambda^8\,B_{34}\,A_{34} \equiv B_{12}\,\widetilde{A}_{12} + \lambda^8\,B_{34}\,\widetilde{A}_{34} \equiv 0,\\
(B_{13} + \lambda^4\,B_{34})\,A_{13} + B_{13}\,(A_{12} - \lambda^4\,A_{34}) \equiv\\
\equiv (B_{13} + \lambda^4\,B_{34})\,\widetilde{A}_{13} + B_{13}\,(\widetilde{A}_{12} - \lambda^4\,\widetilde{A}_{34}) \equiv 0,\\
B_{13}\,A_{13} - \lambda^4\,B_{24}\,A_{24} \equiv B_{13}\,\widetilde{A}_{13} - \lambda^4\,B_{24}\,\widetilde{A}_{24} \equiv 0,\\
(B_{12} - \lambda^4\,B_{34})\,A_{24} - B_{24}\,(A_{12} - \lambda^4\,A_{34}) \equiv
\end{aligned}$$

$$\equiv (B_{12} - \lambda^4 B_{34})\, \widetilde{A}_{24} - B_{24}\, (\widetilde{A}_{12} - \lambda^4 \widetilde{A}_{34}) \equiv 0,$$
$$B_{13}\, A_{24} + B_{24}\, A_{13} \equiv B_{13}\, \widetilde{A}_{24} + B_{24}\, \widetilde{A}_{13} \equiv 0,$$
$$B_{12}\, A_{34} + B_{34}\, A_{12} \equiv B_{12}\, \widetilde{A}_{34} + B_{34}\, \widetilde{A}_{12} \equiv 0,$$

которые в совокупности с тождествами (6) противоречат условию (5) теоремы.

Таким образом, $a = 0$. Отсюда и из тождества A в силу полиномиальной независимости соответствующих функций получаем:

$$B_{12}\, A_{12} + \lambda^8 B_{34}\, A_{34} \equiv C\, \lambda^k\, (B_{12}\, \widetilde{A}_{12} + \lambda^8 B_{34}\, \widetilde{A}_{34}),$$
$$(B_{13} + \lambda^4 B_{34})\, A_{13} + B_{13}\, (A_{12} - \lambda^4 A_{34}) \equiv$$
$$\equiv C\, \lambda^k\, ((B_{13} + \lambda^4 B_{34})\, \widetilde{A}_{13} + B_{13}\, (\widetilde{A}_{12} - \lambda^4 \widetilde{A}_{34})),$$
$$B_{13}\, A_{13} - \lambda^4 B_{24}\, A_{24} \equiv C\, \lambda^k\, (B_{13}\, \widetilde{A}_{13} - \lambda^4 B_{24}\, \widetilde{A}_{24}),$$
$$(B_{12} - \lambda^4 B_{34})\, A_{24} - B_{24}\, (A_{12} - \lambda^4 A_{34}) \equiv$$
$$\equiv C\, \lambda^k\, ((B_{12} - \lambda^4 B_{34})\, \widetilde{A}_{24} - B_{24}\, (\widetilde{A}_{12} - \lambda^4 \widetilde{A}_{34})),$$
$$B_{13}\, A_{24} + B_{24}\, A_{13} \equiv C\, \lambda^k\, (B_{13}\, \widetilde{A}_{24} + B_{24}\, \widetilde{A}_{13}),$$
$$B_{12}\, A_{34} + B_{34}\, A_{12} \equiv C\, \lambda^k\, (B_{12}\, \widetilde{A}_{34} + B_{34}\, \widetilde{A}_{12}),$$

что в случаях
$$B_{12} \not\equiv 0 \quad \text{или} \quad B_{34} \not\equiv 0$$
равносильно пропорциональности бивекторов $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ и $\widetilde{\mathbf{a}}_1 \wedge \widetilde{\mathbf{a}}_2$.

Известно [12], что между классами пропорциональных, отличных от нуля бивекторов и двумерными подпространствами векторного пространства имеется естественное биективное соответствие. В этом соответствии каждому подпространству отвечает внешнее произведение $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ векторов произвольного его базиса $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, а каждому бивектору $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ — подпространство $< \mathbf{x}_1,\, \mathbf{x}_2 >$. Поэтому из последнего тождества следует $< \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2 > = < \widetilde{\mathbf{a}}_1,\, \widetilde{\mathbf{a}}_2 >$, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема единственности обобщает теорему единственности из работы [6], где рассматривался лишь случай, когда закрепление на правом конце представляет жесткое защемление.

3 Выводы

Из теоремы единственности вытекает, что однозначное определение неизвестного закрепления на левом конце возможно только тогда, когда на правом конце реализуется один из следующих случаев:

1) жесткое защемление ;

2) свободный конец;

3) все виды упругого закрепления;

4) сосредоточенный инерционный элемент на конце.

Если же на правом конце реализуется один из случаев:

5) плавающая заделка ;

6) свободное опирание,

то однозначное определение неизвестного закрепления на левом конце невозможно (не выполняется условие теоремы (7)).

Для случаев (5) и (6) можно привести соответствующие примеры. Приведем для определенности один из них.

Пример. Пусть на правом конце реализуется свободное опирание (случай (6))

$$y(1) = y''(1) = 0.$$

Имеем:

$$B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B_{12} = 0, \quad B_{34} = 0.$$

Откуда $B_{12}^2 - \lambda^8 B_{34}^2 \equiv 0$, т. е. условие теоремы (7) не выполняется.

Рассмотрим, теперь, следующие спектральные задачи:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0 \tag{14}$$

и

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad y''(0) = y'''(0) = y(1) = y''(1) = 0. \tag{15}$$

Коэффициенты линейных форм задачи (14) образуют матрицы:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

а коэффициенты линейных форм задачи (15) образуют матрицы:

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Откуда:

$$\Delta(\lambda) \equiv -\frac{1 + \cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda}{2\,\lambda^3}, \quad \widetilde{\Delta}(\lambda) \equiv -\frac{\lambda}{2}\,(1 + \cos\lambda\,\mathrm{ch}\lambda)$$

и

$$\widetilde{\Delta}(\lambda) \equiv \lambda^4\,\Delta(\lambda).$$

Следовательно, ненулевые собственные значения задач (14) и (15) совпадают.

Положительные нули определителей $\Delta(\lambda)$ и $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ вычисляются с заданной степенью точности (см. [8]):

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \lambda_1 = 3.9266; & \lambda_2 = 7.0686; & \lambda_3 = 10.210; & \lambda_3 = 13.352; & \ldots \\
\widetilde{\lambda}_0 = 0; & \widetilde{\lambda}_1 = 3.9266; & \widetilde{\lambda}_2 = 7.0686; & \widetilde{\lambda}_3 = 10.210; & \widetilde{\lambda}_3 = 13.352; & \ldots
\end{array}
$$

Таким образом, в этом случае, виды закрепления на левом конце различны, а собственные частоты совпадают.

Выше были перечислены случаи при которых, задача отыскания неизвестных линейных форм $U_1(y,\lambda)$, $U_2(y,\lambda)$ по собственным частотам изгибных колебаний стержня имеет единственное решение (в том смысле, что линейные оболочки, составленные из коэффициентов этих линейных форм, определяются однозначно). Следующий вопрос — как построить это решение.

В случае, когда правый конец стержня защемлен, методы точного и приближенного определения вида закрепления на левом конце по собственным частотам найдены в [6]. В общем случае, когда на правом конце может быть произвольное закрепление, эти методы применимы без каких-либо изменений. Поэтому в этой работе они не рассматриваются.

Список литературы

[1] Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М. Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Докл. Академии наук. 1999. Т. 367, № 6. С. 739–741.

[2] Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1127–1128.

[3] Ахтямов А. М. О единственности восстановления краевых условий задачи Штурма-Лиувилля по ее спектру // Математическое моделирование. 2000 Т. 12, № 3, № 6.

[4] Ахтямов А. М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, Вып. 4. С. 995–1006.

[5] Akhtyamov A. M., Akhatov I. Sh. Calculation of the boundary conditions at the pivot endpoint. In: Dynamics of Multiphase Systems (editors M. Ilgamov, I. Akhatov and S. Urmancheev) Gilem Publisher & Pol Publisher, Ufa, Russia. 2000. P. 377–379.

[6] Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 2. С. 290–298.

[7] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. 352 с.

[8] Collatz L. Eigenwertaufgaben mit techneschen anwendungen. Leipzig: Akademische verlagsgesellschaft geest & porting K.– G, 1963. = *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.

[9] Strutt W. (Baron Rayleigh) The theory of sound. V. 1. London: Macmillan and co. limited. 1926. = *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Том 1. М., Л.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1940. 500 с.

[10] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[11] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

[12] Постников М. М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.